

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

Kapitel VII. Integration in einer Veränderlichen

In diesem Kapitel wird die Integration von Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ auf die Bestimmung von Flächen zurückgeführt und damit zugleich der Begriff der Flächenbestimmung präzisiert. Es wird hier im wesentlichen nur die Integration von stetigen Funktionen behandelt und in Beziehung zum Begriff der Stammfunktion gesetzt, so dass zum Schluss (des Kapitels und der Vorlesung) auf eine Reihe von Integrationsmethoden eingegangen werden kann.

§20 Integration durch Stammfunktionen

Zur Motivation: Gegeben sei eine nichtnegative Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Man betrachte das Problem der Flächenbestimmung (Inhaltsmessung) der Fläche „oberhalb“ eines kompakten Intervalls $[a, b]$ (genauer: oberhalb der durch das Intervall bestimmten Strecke auf der x -Achse) und unterhalb des Graphen Γ_f . Das Ergebnis sei $I_a^b f \in \mathbb{R}$.

Zugrundelegt wird der Inhaltsbegriff von Rechtecken, Dreiecken und Trapezen aus der Elementargeometrie. Dann ist klar, dass für eine konstante Funktion $f(x) = m$ sich als Flächeninhalt $I_a^b f = (b - a)m$ (Rechteck) ergibt und für eine lineare Funktion $f(x) = mx$ der Flächeninhalt $I_a^b f = \frac{1}{2}(mb + ma)(b - a) = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2)$ (Trapez).

Wir stellen daher an eine allgemeine Inhaltsmessung $I_a^b f$ die folgende Forderung:

(20.1) Forderung: Für die zu integrierende Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, soll für alle $a, b \in I$, $a < b$ gelten:

(I1)

$$(b - a)m_a^b f \leq I_a^b f \leq (b - a)M_a^b f,$$

wobei $m_a^b f := \inf f([a, b])$ und $M_a^b f := \sup f([a, b])$ und

(I2)

$$I_a^b f = I_a^c f + I_c^b f, \text{ wenn } c \in I, a < c < b.$$

(20.2) Satz: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $f \geq 0$, mit I1 und I2 für alle $a, b \in I$, $a < b$. Setze für ein $a \in I$ und $x > a, x \in I$,

$$F(x) := I_a^x f.$$

Ist dann f stetig, so ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in I \cap]a, \infty[$. Analog für $F(x) := I_x^b f$, $x < b$.

(20.3) Definition: $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F in I differenzierbar ist mit $F' = f$.

(20.4) Bemerkungen:

1° Eine Stammfunktion ist eindeutig bestimmt im Falle der Existenz.

2° Sei F Stammfunktion einer Funktion f mit $f \geq 0$. Dann erfüllen die

$$I_a^b f := F(b) - F(a), \quad a, b \in I, \quad a < b,$$

die Bedingungen I1 und I2.

3° Diese Eigenschaft 2° weist den Weg, wie $I_a^b f$ sinnvoller Weise zu definieren ist für den Fall $a \geq b$: $I_a^a f = 0$ und $I_c^d f := -I_d^c f$ für $d < c$, falls $I_a^b f$ mit I1 und I2 für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ gegeben ist.

4° Sei $\mathcal{C}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ die Menge der stetigen Funktionen. Aufgrund der Permanenzeigenschaften 13.4 ist bekannt, dass $\mathcal{C}(I)$ ein Vektorraum über \mathbb{R} ist. $\mathcal{C}(I)$ ist sogar eine (kommutative) Algebra. Eine weitere natürliche Struktur auf $\mathcal{C}(I)$ ist durch den Kegel der nichtnegativen Funktionen $\mathcal{C}_+(I) := \{f \in \mathcal{C}(I) \mid f \geq 0\}$ gegeben. Aus dem vorangehenden Satz folgt in Verbindung mit 2°: Wenn $I_a^b f$ für $f \in \mathcal{C}_+(I)$ existiert, so ist es eindeutig bestimmt.

5° $\forall f \in \mathcal{C}_+(I)$ existieren $I_a^b f$ mit I1 und I2 für alle $a, b \in I, a < b$, $\iff \forall f \in \mathcal{C}(I)$ existiert eine Stammfunktion.

(20.5) Notation: Im Falle der Existenz von $I_a^b f$ mit I1 und I2 schreibt man

$$\int_a^b f(x) dx := I_a^b f$$

und auch

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b dx f(x).$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

ist das *Integral* von f von a nach b .

Beispiele: Für Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ ist $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1}$ eine Stammfunktion und es gilt:

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Für konvergente Potenzreihen $f = \sum c_k T^k$ ist $F = \sum \frac{1}{k} c_{k-1} T^k$ eine Stammfunktion (im Konvergenzintervall I von f) und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} c_{k-1} (b^k - a^k)$$

für $a, b \in]-\rho_f, \rho_f[$.

(20.6) Satz: Zu jeder stetigen nichtnegativen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es $I_a^b f$ mit I1 und I2 für alle $a, b \in I$, $a < b$. Also hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion. [06.02.2007]

(20.7) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Jede stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion F der Form

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

(20.8) Regeln: Für stetige Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und für $a, b \in I$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1°

$$\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx ; \int_a^a f dx = 0.$$

2°

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx ; \int_a^b \lambda f dx = \lambda \int_a^b f dx.$$

Also ist $\int_a^b : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung (ein lineares Funktional, eine Linearform) und damit ein Element des Dualraumes von $\mathcal{C}(I)$.

3° Im Falle $a < b$ gilt:

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f dx \geq 0,$$

$$f \geq 0, f|_{[a,b]} \neq 0 \implies \int_a^b f dx > 0,$$

$$f \leq g \implies \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx,$$

$$f \leq g, f|_{[a,b]} \neq g|_{[a,b]} \implies \int_a^b f dx < \int_a^b g dx.$$

Also ist $\int_a^b : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ nicht nur ein lineares Funktional, sondern auch ein *positives* Funktional ($\mu : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt positiv, wenn für alle $f \in \mathcal{C}_+(I)$ stets $\mu(f) \geq 0$ gilt).

4° Im Falle $a < b$ gilt:

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

§21 Integrationsmethoden

Die Ergebnisse des vorangehenden Paragraphen besagen, dass zumindestens für die stetigen Funktionen ein Integral über kompakten Intervallen existiert. Zur konkreten Bestimmung der Integrale werden hier einige Methoden zusammengestellt.

(21.1) Integration durch Stammfunktion: Die Kenntnis einer Stammfunktion F zu einer stetigen Funktion f liefert sofort (vgl. 20.4.2° und 20.6):

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Generell wird $F|_a^b := F(b) - F(a)$ gesetzt, so dass $\int_a^b f dx = F|_a^b$.

Beispiele (neben dem Beispiel einer allgemeinen konvergenten Potenzreihe, vgl. vor 20.6):

1°

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ und $a, b > 0$.

2°

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log b - \log a,$$

wobei $a, b > 0$.

3°

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

4°

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan b - \arctan a,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

5°

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin b - \arcsin a,$$

wobei $-1 < a < b < 1$.

(21.2) Partielle Integration: Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f g' dx = f g|_a^b - \int_a^b f' g dx.$$

Beispiele:

1°

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x dx = -\sin x \cos x \Big|_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} -\cos^2 x dx$$

mit $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$, da $f g' = \sin^2$ und $f' g = -\cos^2$. Also

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 x dx.$$

Wegen $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ folgt

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\pi.$$

2°

$$\int_1^2 x \log x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = 2 \log 2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2 = 2 \log 2 - \frac{3}{4}.$$

(21.3) Integration durch Substitution: Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Rezept: Bei der Substitution $x = \varphi(t)$ ersetze man dx durch $\varphi'(t) dt$: $dx = \varphi'(t) dt$.

Beispiele:

1° Zur Bestimmung von $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ dient die Substitution $x = \sin t$:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\pi,$$

wie oben in 21.1° gezeigt.

Dieses Ergebnis unterstützt die Vorüberlegungen in § 7 zum Inhalt der Kreisscheibe. Das Integral beschreibt ja die Fläche unterhalb des Halbkreises vom Radius 1, das heißt, die Fläche des Einheitskreises ist entsprechend der Integralrechnung gerade π in Übereinstimmung mit den heuristischen Vorüberlegungen in 7.12.

2°

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log g(x) \Big|_a^b,$$

wenn g stetig differenzierbar und überall positiv ist. Das folgt aus der Substitution $y = g(x)$, $dy = g'(x) dx$ im Integral $\int \frac{1}{y} dy$; oder man sieht gleich, dass $\log g$ Stammfunktion des Integranden ist. Zum Beispiel:

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{2x}{1+x^2} \Big|_a^b.$$

(21.4) Partialbruchzerlegung: Wir bauen auf den Satz über die Partialbruchzerlegung: Für Polynome P und Q , die teilerfremd sind (d.h. es gibt kein Polynom R vom Grad ≥ 1 , das P und Q teilt) und für die der Grad von P kleiner als der von Q ist, hat die rationale Funktion

$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid Q(z) = 0\},$$

eine Zerlegung als eine endliche Summe von rationalen Funktionen der Form

$$\frac{A}{(x-x_0)^m} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ und } m \in \mathbb{N}_1$$

und

$$\frac{Bx+C}{(x^2+2Dx+E)^n} \quad \text{mit } B, C, D, E \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}_1.$$

Dabei durchläuft x_0 die reellen Nullstellen von Q und die quadratischen Ausdrücke $x^2+2Dx+E$ sind ohne reelle Nullstelle mit zwei konjugiert komplexen Nullstellen z_0 und \bar{z}_0 von Q , also

$x^2 + 2Dx + E = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$. Es gilt insbesondere $0 \leq D^2 < E$, ansonsten hat man doch eine reelle Nullstelle.

Beispiel:

$$\frac{3(x+1)}{x^4-x} = -\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Um diese Darstellung zu finden, muss man zunächst das Nennerpolynom Q zerlegen. Offensichtlich sind hier 0 und 1 Nullstellen von $Q(x) = x^4 - x$, also hat man erst einmal die Identität $Q(x) = x(x-1)(x^2+ax+b)$, und man sieht leicht, dass $a = b = 1$ ist. Der quadratische Ausdruck $x^2 + x + 1$ hat keine Nullstelle in \mathbb{R} , es gilt $x^2 + x + 1 = (x - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}))(x - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}))$. Der Satz über die Partialbruchzerlegung besagt, dass

$$\frac{3(x+1)}{x^4-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

gelten muss, mit geeigneten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. A und B kann man dann durch Grenzwertbetrachtungen erhalten, z.B. ergibt sich $A = -3$ aus

$$\frac{3(x+1)}{x^3-1} = A + x \frac{B}{x-1} + x \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

indem x gleich Null gesetzt wird und $B = 2$ analog. Die verbleibenden Koeffizienten findet man durch Einsetzen von z.B. $x = 2$ und $x = -1$.

Ein weiteres Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

Integrationsmethode: Daher bedeutet die Integration solcher rationaler Funktionen f , dass die Partialbruchzerlegung von f gefunden werden muss, und dass Stammfunktionen zu den folgenden Brüchen bekannt sind (wir schreiben $\int g dx$ für eine Stammfunktion von g):

1°

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^m} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-m} \left(\frac{1}{(x-x_0)} \right)^{1-m} & \text{wenn } m \neq 1 \\ \log|x-x_0| & \text{wenn } m = 1 \end{cases}$$

nach 21.1.1°/2°.

2°

$$\int \frac{1}{x^2+2Dx+E} dx = \frac{1}{\sqrt{E-D^2}} \arctan \frac{x+D}{\sqrt{E-D^2}},$$

wie sich mit $\Delta := \sqrt{E-D^2}$ aus Substitution $y = \frac{x+D}{\Delta}$ wegen

$$\int \frac{1}{x^2 + 2Dx + E} dx = \frac{1}{\Delta} \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{1}{\Delta} \arctan y = \frac{1}{\Delta} \arctan \frac{x + D}{\Delta}$$

unter Verwendung unseres Resultats 21.1.4° ergibt.

Man beachte die Bedingung $E - D^2 > 0$, die erfüllt ist, da das Nennerpolynom $q(x) = x^2 + 2Dx + E$ nach Voraussetzung keine reelle Nullstelle hat. Sollte q doch eine reelle Nullstelle haben, so ist $q(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ und $\frac{1}{q}$ zerlegt sich in zwei Summanden

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x - x_0)} - \frac{1}{(x_0 - x_1)(x - x_1)},$$

deren Stammfunktionen aus 1° schon bekannt sind.

3°

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2Dx + E} dx = \frac{1}{2} B \log |x^2 + 2Dx + E| + (C - DB) \int \frac{1}{x^2 + 2Dx + E} dx,$$

wie sich aus der Darstellung

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 2Dx + E} = \frac{1}{2} B \frac{q'(x)}{q(x)} + (C - DB) \frac{1}{q(x)}$$

und 21.3.2° ergibt. Wegen 2° ist dann auch hier die Stammfunktion bekannt.

4° Schließlich für $n \in \mathbb{N}_2$:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 2Dx + E)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)(E-D^2)} \frac{x + D}{(x^2 + 2Dx + E)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)(E-D^2)} \int \frac{1}{(x^2 + 2Dx + E)^{n-1}} dx.$$

Unser Beispiel von oben hat dann die folgende Stammfunktion

$$\int \frac{3(x+1)}{x^4 - x} dx = -3 \log |x| + 2 \log |x-1| + \frac{1}{2} \log (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

(21.5) Numerische Integration: (Sehnentrapezregel) Die Sehnentrapezregel (auch einfach „Trapezregel“ genannt) für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Schrittweite $h := \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$ ist

$$S_h f := \frac{1}{2} h f(a) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2} h f(b).$$

Für den Fall, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_h f \right| \leq \frac{b-a}{12} M h^2,$$

wobei $M := \sup\{|f''(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Es liegt also quadratische Konvergenz vor. Bezogen auf die Anzahl n der Teilintervalle sieht diese Abschätzung mit $S_n f = S_h f$ folgendermaßen aus:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n f \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12} \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

(21.6) Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)¹ Für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$ gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Die Aussage gilt ebenso für den Fall $g \leq 0$.

[09.02.2007]

Die Aussage gilt nicht allgemein: $\int_0^1 f(x)(2x-1)dx$ ist im allgemeinen nicht 0 (etwa für $f(x) = 6x : \int_0^1 f(x)(2x-1)dx = 4x^3 - 3x^2|_0^1 = 1$), während $\int_0^1 (2x-1)dx = x^2 - x|_0^1 = 0$ gilt.

[[Zum Beweis des Mittelwertsatzes stellen wir als Erstes

$$m_a^b f \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M_a^b f \int_a^b g(x)dx$$

fest: Diese Ungleichungen folgen aus der Monotonie des Integrals (20.8.3°) oder direkt aus der Konstruktion (Beweis zu 20.6). Also gibt es $\eta \in [m_a^b f, M_a^b f]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx.$$

Nach Zwischenwertsatz existiert schließlich $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$, also

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

]]

[[Beweis der Sehnentrapezregel 21.5: Wir setzen $a_k := a + kh$ zur Abkürzung (wobei $h = \frac{b-a}{n}$) und berechnen in einem ersten Schritt mit $H_k(x) = x - a_k - \frac{1}{2}h$ unter Verwendung der partiellen Integration:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \int_{a_k}^{a_{k+1}} H'_k(x) f(x) dx = H_k(x) f(x) \Big|_{a_k}^{a_{k+1}} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} H_k(x) f'(x) dx,$$

also

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \frac{1}{2}h(f(a_k) + f(a_{k+1})) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} H_k(x) f'(x) dx.$$

Aufsummiert ergibt diese Identität auch schon ein Ergebnis (gelegentlich Eulersche Summenformel genannt). Mit der Stammfunktion $G_k(x) := \frac{1}{2}x^2 - (a_k + \frac{1}{2}h)x + \frac{1}{2}(a_k^2 + a_k h)$ von H_k gehen wir aber einen Schritt weiter (wieder partielle Integration):

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} H_k(x) f'(x) dx = \int_{a_k}^{a_{k+1}} G'_k(x) f'(x) dx = G_k f' \Big|_{a_k}^{a_{k+1}} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x) f''(x) dx.$$

Wegen $G_k(a_k) = 0 = G_k(a_{k+1})$ verschwindet der erste Summand und die Funktionen G_k setzen sich zusammen zu einer stetigen Funktion G auf dem Intervall $[a, b]$ mit $G|_{[a_k, a_{k+1}]} = G_k|_{[a_k, a_{k+1}]}$ mit $G \leq 0$. Aufsummieren liefert

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \frac{1}{2}hf(a) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2}hf(b) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x) f''(x) dx,$$

also

¹in der Vorlesung erwähnt als wesentliches Beweismittel zum Beweis von 21.5, aber nicht vorgetragen und nicht bewiesen

$$\int_a^b f(x) dx = S_h(f) + \int_a^b G(x) f''(x) dx,$$

und aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 21.6 ergibt sich wegen $G \leq 0$

$$\int_a^b f(x) dx = S_h(f) + f''(\xi) \int_a^b G(x) dx$$

für ein ξ zwischen a und b . Die Behauptung des Satzes folgt schließlich aus

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x) dx = -\frac{1}{12} h^3$$

zusammen mit

$$\int_a^b G(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} G_k(x) dx = -\frac{1}{12} n h^3 = -\frac{1}{12} (b-a) h^2.$$

Denn insgesamt haben wir ja

$$S_h(f) = \int_a^b f(x) dx + f''(\xi) \frac{b-a}{12} h^2$$

gezeigt.

]]