

## MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung  
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

### Kapitel VI. Differenzierbare Funktionen in einer Veränderlichen

In diesem Kapitel werden differenzierbare Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  studiert, die auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert sind. Dabei sind offene, halboffene und abgeschlossene beschränkte Intervalle zugelassen, wie auch die unbeschränkten Intervalle  $]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$ ,  $]a, \infty[$ ,  $[a, \infty[$ ,  $]-\infty, b]$ ,  $]-\infty, b[$ , mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . In diesem Kapitel ist  $I$  also immer ein solches Intervall.

#### §16 Der Begriff der differenzierbaren Funktion

**(16.1) Definition:** Für eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a, b \in I$  mit  $a \neq b$  ist

$$f[a; b] := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der *Differenzenquotient* von  $f$  in  $a$  bezüglich  $b$ .

**Bedeutung:**  $f[a; b] := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  ist die Steigung der Sekante

$$y = f[a; b] \cdot x + (f(a) - f[a; b] \cdot a)$$

zum Graphen  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$  durch die Punkte  $(a, f(a)), (b, f(b))$ .

$f$  ist in  $a \in I$  *differenzierbar*, wenn

$$\lim_{b \rightarrow a} f[a; b]$$

existiert.  $f'(a) := \lim_{b \rightarrow a} f[a; b]$  ist dann die *Ableitung von  $f$  in  $a$*  oder auch der *Differentialquotient von  $f$  in  $a$* . (Achtung: Die Grenzwertbildung  $\lim_{b \rightarrow a} f[a; b]$  bezieht sich hier auf alle  $b \in I$ ,  $b \neq a$ .)

$f$  heißt *differenzierbar in  $I$* , wenn  $f$  in allen Punkten  $a \in I$  differenzierbar ist.

**Bedeutung:**  $f'(a)$  ist (im Falle der Existenz des Grenzwertes  $\lim_{b \rightarrow a} f[a; b]$ ) die Steigung der *Tangente  $T_f(a)$  an den Graphen  $\Gamma_f$  in  $(a, f(a)) \in \Gamma_f$* . Tangentengleichung:

$$y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a).$$

Äquivalenz:  $f$  in  $a \in I$  differenzierbar  $\iff \forall x_k \in I : x_k \rightarrow a \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f[a; x_k]$  existiert.

Schreibweisen:

$$1) f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} f[a; b] = \lim_{x \rightarrow a} f[a; x] = \lim_{h \rightarrow 0} f[a; a + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2)  $\dot{f}(a)$  statt  $f'(a)$  oder  $f'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df}{dx}|_{x=a} = \frac{d}{dx}|_{x=a} f$  und andere Notationen.

**(16.2) Satz:** Jede in  $a \in I$  differenzierbare Funktion ist dort stetig.

**(16.3) Beispiele:**

1° Jede konstante Funktion  $f(x) := c, x \in I = \mathbb{R}$ , ist differenzierbar in allen  $a \in \mathbb{R}$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig ist. Es gilt:  $f' = 0$ , d.h.  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

2° Die „Identität“  $f(x) := x, x \in I = \mathbb{R}$ , ist differenzierbar in allen  $a \in \mathbb{R}$ , und es gilt  $f' = 1$ .

3°  $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ , ist differenzierbar, und es gilt  $f'(x) = 2x$ .

4°  $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ , ist stetig und lipschitzstetig.  $f$  ist allen  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , differenzierbar mit  $f'(a) = 1$  für  $a > 0$  und  $f' = -1$  für  $a < 0$ .  $f$  ist in  $a = 0$  nicht differenzierbar.

5° Die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ , ist in allen  $a \in \mathbb{R}$  differenzierbar, und es gilt  $\frac{d}{dx}|_{x=a} e^x = e^a$ .

**(16.4) Satz:**  $f = \sum c_n T^n$  sei eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, x \in ]-\rho, \rho[$$

in allen  $a \in ]-\rho, \rho[$  differenzierbar mit

[16.01.07]

$$f'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n a^{n-1}.$$

Bemerkung: Insbesondere sind die Polynome differenzierbar und es gilt  $(c_n x^n)' = n c_n x^{n-1}$ . Der Satz bedeutet auch, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden können. Es gilt genauer: Die (früher eingeführte, vgl. 14.5) formale Ableitung  $f' = \sum (n+1) c_{n+1} T^n$  (durch gliedweise Differentiation) der formalen Potenzreihe  $f$  ist als Funktion im Konvergenzintervall die tatsächliche Ableitung im Sinne von 16.1.

**(16.5) Folgerungen:**

1°  $\sin$  ist in  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $\sin' = \cos$ .

2°  $\cos$  ist in  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $\cos' = -\sin$ .

3°  $\sinh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}$ , („Sinus Hyperbolicus“) ist differenzierbar in  $\mathbb{R}$  mit

$$\sinh'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} =: \cosh x,$$

und  $\cosh' = \sinh$ .

**(16.6) Regeln:** (Permanenzeigenschaften)  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar in  $a \in I, I \subset \mathbb{R}$ . Dann:

1°  $f + g$  ist differenzierbar in  $a$  mit  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .

2°  $fg$  ist differenzierbar in  $a$  mit  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

3° Im Falle  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  ist auch  $\frac{f}{g}$  in  $a$  differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

**(16.7) Kettenregel:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in I$  differenzierbar, und sei  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  in  $f(a)$  differenzierbar mit  $f(I) \subset J$ . Dann ist die Komposition  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a))f'(a).$$

**(16.8) Weitere Beispiele:**

1°  $f(x) = x|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  $f$  ist in allen Punkten  $a \in \mathbb{R}$  differenzierbar, und es gilt  $f'(a) = 2|a|$ .

2°

$$f'(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion  $f$  ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion  $f'$  ist also in 0 nicht stetig und daher erst recht nicht differenzierbar.

3°  $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$ ,  $x \in ]0, \infty[$ , ist differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{k} \sqrt[k]{x^{-k+1}} = \frac{1}{k} x^{-\frac{k-1}{k}} = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}.$$

[[Beweis<sup>1</sup> von 3° im Falle  $k = 2$ :

$$f[x; x+h] = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$k > 2$  analog!

]]

## §17 Kritische Punkte und Mittelwertsatz

Ein *kritischer* Punkt einer differenzierbaren Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Punkt  $a \in I$  mit  $f'(a) = 0$ . Kritische Punkte werden auch *stationäre* Punkte genannt. Sie können verwendet werden, um Maxima und Minima der Funktion  $f$  aufzuspüren, und sie spielen deshalb eine wichtige Rolle in der Formulierung physikalischer Grundprinzipien (Fermatprinzip, Hamiltonprinzip).

**(17.1) Satz:**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine differenzierbare Funktion in einem offenen Intervall und  $f$  habe in  $\xi \in I$  ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum. Dann gilt  $f'(\xi) = 0$ .

Bemerkungen: Es handelt sich nur um ein notwendiges Kriterium. Beispielsweise ist die Funktion  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , streng monoton wachsend, hat also kein lokales Maximum oder Minimum. Aber es gilt  $f'(0) = 0$ , d.h. 0 ist kritischer Punkt.

Die Bedingung, dass  $I$  ein offenes Intervall sein muss, kann nicht fortgelassen werden. Denn  $f(x) = x$  hat in Bezug auf das Intervall  $]a, b]$  in  $b$  ein Maximum, aber es gilt sicherlich nicht  $f'(b) = 0$ , weil  $f' = 1$ .

**(17.2) Satz von Rolle:** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar,  $a < b$ . Unter der Voraussetzung  $f(a) = f(b)$  gibt es dann ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

<sup>1</sup>nicht vorgetragen

Bedeutung: Parallel zur  $x$ -Achse bzw. zur Sekante durch  $(a, f(a)), (b, f(b))$  gibt es eine Tangente an den Graphen  $\Gamma_f$  der Funktion  $f$ . [19.01.07]

**(17.3) Mittelwertsatz:** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar,  $a < b$ . Dann existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f[b; a].$$

Allgemeiner: Ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere stetige Funktion, die in  $]a, b[$  noch differenzierbar ist, so gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Bedeutung: Es gibt stets ein  $\xi$ , so dass die Tangente an  $\Gamma_f$  in  $(\xi, f(\xi))$  parallel zur Sekante durch  $(a, f(a)), (b, f(b))$  verläuft.

**(17.4) Folgerungen:** (Monotonie, Extremwerte)

1°  $f' \geq 0 \implies f$  ist monoton wachsend.

2° Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Es gebe  $a \in I$  und  $r > 0$  mit  $U_r(a) \subset I$  und  $f'(a) = 0$ . Ist dann auch noch  $f'$  in  $U_r(a)$  differenzierbar und gilt  $f''(a) \neq 0$ , so hat  $f$  in  $a$  ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum, wenn  $f''(a) < 0$  und ein lokales Minimum, wenn  $f''(a) > 0$ .

**(17.5) Folgerungen:** (Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen)

1° Jede Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  mit  $f' = 0$  ist eine konstante Funktion. Es folgt daher: Das Anfangswertproblem

$$f' = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = y_0,$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung  $f(x) = y_0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

2° Sind  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf dem Intervall  $I$  mit  $f' = g'$ , so gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f = g + c$ .

3° Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zu jedem  $y_0 \in \mathbb{R}$  gibt es genau eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die das Anfangswertproblem

$$f' = \lambda f \quad \text{und} \quad f(0) = y_0$$

löst:  $f(x) = y_0 e^{\lambda x}$ .

4° Analog für das System von Differentialgleichungen: Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} f' &= g & f(0) &= 0 \\ g' &= -f & g(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung  $f = \sin, g = \cos$ .

5° Ebenso:

$$\begin{aligned} f' &= g & f(0) &= 0 \\ g' &= f & g(0) &= 1 \end{aligned}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung  $f = \sinh, g = \cosh$ .

6° Wenn bereits bekannt ist, dass die Lösungen des jeweiligen Anfangswertproblems sich in konvergente Potenzreihen entwickeln lassen, so liefern die Differentialgleichungen Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten der Potenzreihe.

So zum Beispiel in 3°: Mit dem Ansatz  $f = c_n T^n$  ergibt sich aus  $f' = \lambda f$  wegen  $f(0) = y_0 = c_0$ ,  $f'(0) = \lambda f(0)$  und  $f''(0) = c_1$ ,  $f''(0) = \lambda f'(0) = \lambda^2 f(0) = 2!c_2$ , ...,  $\lambda^k f(0) = k!c_k$ , also  $f(x) = \sum \frac{1}{k!} \lambda^k y_0 x^k = y_0 \sum \frac{1}{k!} (\lambda x)^k$ .

**(17.6) Folgerung:** (Schränkensatz) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann ist  $f$  Lipschitzstetig auf dem Intervall und daher auch gleichmäßig stetig.

Beispielsweise hat  $f$  eine beschränkte Ableitung, wenn  $I$  kompakt ist und die Ableitung  $f'$  stetig ist.

## §18 Umkehrfunktion

Umkehrfunktionen von bereits bekannten Funktionen (wie z.B.  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ ) liefern neue interessante und wichtige Funktionen.

**(18.1) Umkehrsatz:** Die stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $]a, b[$  differenzierbar. In  $x_0 \in ]a, b[$  gelte:

$$f'(x_0) \neq 0 \text{ und } f' \text{ ist in } x_0 \text{ stetig.}$$

Dann gibt es ein offenes Intervall  $] \alpha, \beta[ \subset I$ ,  $a \leq \alpha < x_0 < \beta \leq b$ , so dass  $f|_{] \alpha, \beta[}$  umkehrbar ist mit  $f(] \alpha, \beta[) = ]A, B[$ , und die Umkehrfunktion  $g = (f|_{] \alpha, \beta[})^{-1} : ]A, B[ \rightarrow ] \alpha, \beta[$  ist differenzierbar mit der Ableitung ( $y \in ]A, B[$ )

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

bzw. für  $x \in ] \alpha, \beta[$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

[23.01.07]

### Anwendungen:

**(18.2) Exponentialfunktion und Logarithmus:** Die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend, also injektiv, und es gilt  $f(\mathbb{R}) = ]0, \infty[ =: \mathbb{R}_+$ . Die Umkehrfunktion  $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist per definitionem der Logarithmus  $\log : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Also gilt für  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ :  $y = e^x \iff x = \log y$ .

$f$  ist differenzierbar mit stetiger Ableitung  $f' = f$  und es ist  $f' > 0$ . Nach Umkehrsatz ist daher  $\log$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dy} \log y = \frac{1}{y}.$$

Das Additionstheorem  $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$  hat das entsprechende Additionstheorem

$$\log(yy') = \log y + \log y'$$

zur Folge.

Aus der Identität  $1 + x = e^{\log(1+x)}$ ,  $x > -1$ , lässt sich mit einiger Mühe durch Koeffizientenvergleich herleiten, dass für  $|x| < 1$  die Potenzreihenentwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

besteht. Ein anderer Weg, diese Entwicklung herzuleiten, nutzt die Restgliedabschätzung zum Taylorschen Satz (19.5).

Die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis  $a > 0$  ist definiert als

$$a^x := e^{x \log a}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Die Funktion ist stetige und differenzierbare Fortsetzung von

$$\frac{p}{q} \mapsto a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad q \in \mathbb{N}_1, p \in \mathbb{Z},$$

nach  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto a^x$  ist in ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} a^x = (\log a) a^x.$$

Die allgemeine Exponentialfunktion ist also für  $a > 1$  streng monoton wachsend, und für  $a < 1$  streng monoton fallend.

Die Umkehrabbildung ist der Logarithmus  $\log_a$  zur Basis  $a > 0$ :

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

mit

$$\frac{d}{dy} \log_a y = \frac{1}{\log a} \frac{1}{y}.$$

### (18.3) Weitere Beispiele von wichtigen Umkehrfunktionen:

1°  $f(x) := x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ,  $x > 0$ , wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein fester Exponent ist (Potenzfunktion).  
 $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$ , (Vertraute Formel für  $\alpha = 1, 2, \dots$ ) die Umkehrfunktion ist  $g(y) = e^{\frac{1}{\alpha} \log y}$  mit der Ableitung  $g'(y) = \frac{1}{\alpha y} g(y)$ .

2°  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , ist streng monoton fallend auf diesem Intervall wegen  $f'(x) = -\sin x < 0$ ,  $0 < x < \pi$ . Die Umkehrabbildung ist  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ . Für  $x = \arccos y$ , das heißt  $\cos x = y$ , ist  $\sin x = \sqrt{1 - y^2}$  und daher

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Analog  $\sin$  mit der dazugehörigen Umkehrfunktion  $\arcsin$ .

3°  $f(x) = \tan x$ ,  $x \in ]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ . Es ist  $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$  und die Umkehrfunktion  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$  hat die Ableitung

$$\arctan' y = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Analog  $\cot$  und  $\operatorname{arccot}$ .

4°  $f(x) = \sinh x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Es ist  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} x^{2n} > 0$ . Die Umkehrfunktion  $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat als Ableitung

$$\operatorname{Arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Analog  $\cosh$  mit der Umkehrfunktion  $\operatorname{Arcosh}$ .

**(18.4) Hilfssatz:** (Umkehrsatz für monotone Funktionen)<sup>2</sup> Eine streng monotone Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem offenen Intervall  $I$  hat eine stetige Umkehrfunktion  $g : f(I) \rightarrow I$ .

[[Beweis: Als streng monotone Funktion ist  $f$  injektiv, also existiert die Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  auf der Bildmenge  $f(I)$ . Zu zeigen ist, dass  $g$  stetig ist.  $f$  sei streng monoton wachsend. Dann ist auch  $g$  streng monoton wachsend. Seien  $a \in I$  und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so dass  $U_\varepsilon(a) = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \subset I$ . Aus der Monotonie folgt  $f(a - \varepsilon) < f(a) < f(a + \varepsilon)$ . Daher gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(a - \varepsilon) < f(a) - \delta$  und  $f(a) + \delta < f(a + \varepsilon)$ . Für alle  $y \in I \cap ]f(a) - \delta, f(a) + \delta[$  ist wegen der Monotonie von  $g$  stets  $a - \varepsilon = g(f(a - \varepsilon)) < g(f(a) - \delta) < g(y) < g(f(a) + \delta) < g(f(a + \varepsilon)) = a + \varepsilon$ , also  $|g(y) - a| < \varepsilon$ . Wegen  $a = g(f(a))$  ist das gerade die Bedingung für die Stetigkeit von  $g$  in  $f(a)$ .

Im Falle einer monoton fallenden Funktion  $f$  verfährt man analog. ]]

## §19 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Dieser Paragraph gliedert sich in die folgenden vier Abschnitte, in denen verschiedene wichtige Anwendungen des Mittelwertsatzes behandelt werden:

- A. Grenzwertregeln von de l'Hôpital
- B. Der Taylorsche Satz
- C. Konvexe und konkave Funktionen
- D. Das Newtonverfahren

### A. Grenzwertregeln von de l'Hôpital

Wir schließen Grenzwerte der Form  $\lim_{x \rightarrow b} = C$  auch für die Fälle  $b, C \in \{\infty, -\infty\}$  mit in die Betrachtung ein, die analog zu den üblichen Fällen definiert sind, ohne dass wir das hier detailliert erklären.

Der Ausdruck  $\lim_{x \rightarrow b-} = C$  bezeichnet den Grenzwert aller Folgen  $(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow b$ , mit  $x_n < b$ , und  $\lim_{x \rightarrow a+} = D$  analog den rechtsseitigen Grenzwert.

**(19.1) Satz:** Es seien differenzierbare Funktionen  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$  gegeben. Es gelte

$$A. \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$$

oder

$$B. \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = \infty \text{ (oder } = -\infty).$$

Ist dann

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C,$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Analog für rechtseitige Grenzwerte  $x \rightarrow a+$ .

---

<sup>2</sup>Diese Aussage wurde in der Vorlesung so nicht vorgetragen, allerdings erwähnt, weil sie im Beweis des Umkehrsatzes benötigt wurde.

**(19.2) Beispiele:**1° Für  $\lambda > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda e^x}{1} = \infty.$$

2° Für  $\lambda > 0$  und  $n \in \mathbb{N}_2$ , indem der Ansatz aus 1° iteriert wird:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda e^x}{n x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n e^x}{n! \cdot 1} = \infty.$$

Für noch so kleine  $\lambda > 0$  wächst  $e^{\lambda x}$  also entscheidend schneller als  $x^n$  für noch so große  $n \in \mathbb{N}$ .

3° Bereits mit Potenzreihenmethoden behandelt, aber passend zum Thema:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{e^x}{1} = 1,$$

und ebenso

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

4° Für  $\lambda > 0$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^\lambda \log x = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\log x}{x^{-\lambda}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\lambda x^{-\lambda-1}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{-\lambda} x^\lambda = 0.$$

5°

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1 - \cos \frac{1}{2}x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}x}{\cos x} = \frac{1}{4}.$$

und ebenso

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1 - \cos \frac{1}{2}x}{1 - \cos x} = \frac{1}{4}.$$

6°

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = 2,$$

aber nicht

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{2} = (4).$$

Denn hier ist vor der letzten Gleichung die Voraussetzung des Satzes nicht erfüllt: Es ist nicht  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 0$ .



## B. Der Satz von Taylor

Für eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  setzen wir  $f^{(0)} := f$  und  $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ , wenn  $f^{(n)}$  differenzierbar ist.  $f$  heißt dann  $(n+1)$ -mal differenzierbar und  $f^{(k)}$  ist  $k$ -te Ableitung von  $f$  für  $1 \leq k \leq n+1$ . Statt  $f^{(2)}$  schreibt man meist  $f''$ , für  $f^{(3)}$  entsprechend  $f'''$  und so weiter.

Andere Notation:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \left( \frac{d}{dx} \right)^n f.$$

[26.01.07]

**(19.3) Lemma:**  $f = \sum c_n T^n$  sei eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist die Funktion  $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ,  $|x| < \rho$ ,  $k$ -mal differenzierbar für jedes  $k \in \mathbb{N}$  mit der  $k$ -ten Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} x^n.$$

**(19.4) Folgerung:** Unter den gleichen Voraussetzungen gilt

$$f^{(k)}(0) = k! c_k \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**(19.5) Satz von Taylor:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$  mindestens  $(n+1)$ -mal differenzierbar. Zu  $a \in I$  und  $x \in I \setminus \{a\}$  gibt es dann stets ein  $\xi$  zwischen  $a$  und  $x$  mit

$$f(x) = T_a^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Dabei ist das Taylorpolynom  $T_a^n f(x)$  zu  $f$  vom Grad  $n$  definiert als

$$T_a^n f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

**(19.6) Bemerkungen:**

1° Wenn  $f = \sum c_n T^n$  eine konvergente Potenzreihe ist, so gilt im Konvergenzintervall offenbar

$$T_0^n f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad n \rightarrow \infty.$$

2° Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  erhält man zwar in einem Punkt  $a \in I$  die Taylorreihe

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (T-a)^n,$$

diese stellt aber in der Regel nicht die Funktion  $f$  bei  $a$  dar. Drei Fälle können auftreten:

A. Die Taylorreihe divergiert, d.h. sie konvergiert nur für  $T = a$ ; anders ausgedrückt in den Begriffen, die wir die ganze Zeit benutzen: Die Potenzreihe

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} T^n$$

divergiert. Beispiele von beliebig oft differenzierbaren Funktionen, für die die Taylorreihe divergiert, sind nicht leicht anzugeben, es gibt sie aber in Überzahl.

B. Die Taylorreihe konvergiert zwar, aber die Summenwerte der Reihe stimmen nicht mit der Funktion  $f$  überein. Beispiel:

$$f(z) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar und es gilt  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Taylorreihe in 0 ist also die Potenzreihe  $p = \sum c_k T^k$  mit  $c_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Taylorreihe konvergiert daher und es ist offensichtlich  $p(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt also nicht  $p(x) = f(x)$ ,  $x > 0$ , d.h. die konvergente Taylorreihe stellt die Funktion in keinem Offenen Intervall um den Entwicklungspunkt 0 dar.

C. Die Taylorreihe konvergiert und für ein  $r > 0$  gilt für alle  $x \in ]a - r, a + r[$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

3° Eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , für die die Situation aus 2°C immer vorliegt, die sich also in jedem Punkt  $a \in I$  in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lässt, heißt *analytisch*. Es lässt sich zeigen, dass eine konvergente Potenzreihe  $f$  in ihrem Konvergenzintervall immer eine analytische Funktion darstellt. Dazu ordnet man  $f(x) = \sum_{n+1}^{\infty} c_n x^n$  nach Potenzen von  $x - a$  um und zeigt unter Verwendung der absoluten Konvergenz der Potenzreihe, dass die entstehende Reihe gegen die ursprünglichen Funktionswerte konvergiert.

**(19.7) Restgliedabschätzung beim Logarithmus:** Wir untersuchen die Taylorentwicklung der Funktion  $\log$  im Entwicklungspunkt  $a = 1 \in \mathbb{R}$  und schreiben  $f(x) := \log(1 + x)$ ,  $x > -1$ .

Es gilt  $f'(x) = (1 + x)^{-1}$  und

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! (1 + x)^{-(k+1)}$$

bzw.

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}.$$

Daher

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!.$$

Das Taylorpolynom von  $f$  in 0 vom Grad  $n$  ist also

$$T_0^n f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

und die Taylorreihe ist

$$\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Entsprechend von  $\log$  in 1:

$$T_1^n(\log)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

$$\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.$$

Die Potenzreihe  $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} T^k$  ist uns schon mehrfach begegnet, und wir wissen, dass sie in  $] -1, 1[$  konvergiert. Es liegt nahe, zu erwarten, dass die Potenzreihe auch die Funktion  $f$  darstellt, das heißt, dass  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$  gilt für  $-1 < x < 1$ . Das muss aber bewiesen werden, denn im allgemeinen ist nicht richtig, dass die Konvergenz der Taylorreihe bedeutet, dass sie gegen die Funktion konvergiert, wie wir am Beispiel 19.6.2° sehen.

Zum Beweis dafür, dass die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert, ist die Standardmethode, die Restglieder beim Taylorschen Satz zu verwenden. Denn die Taylorreihe konvergiert ja nach dem Taylorschen Satz in dem betrachteten Bereich gegen  $f$ , wenn die Restglieder in Abhängigkeit von  $n$  gegen 0 konvergieren. Das Restglied hat hier die Form

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit  $\xi$  zwischen 0 und  $x$ . Es folgt für  $0 < x < 1$  wegen  $0 < \xi \leq x$  unmittelbar

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^n f(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq x < 1$ . Im Falle  $x < 0$  hat man entsprechend

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(1-|\xi|)^{n+1}},$$

und daher für  $-\frac{1}{2} < x < 0$ :  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$  wegen  $\frac{|x|}{1-|\xi|} \leq 1$ . Wir haben also gezeigt, dass die Taylorreihe in diesem Falle für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} < x < 1$ , gegen die Funktion  $f$  konvergiert. Man kann außerdem zeigen, dass  $f(x) = \log(1+x)$  noch auf dem Intervall  $] -1, 1[$  durch die Taylorreihe dargestellt wird:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1.$$

Zum Beweis kann man aber auch Potenzreihenmethoden heranziehen und insbesondere die Definition der Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion verwenden (Koeffizientenvergleich oder direkter Nachweis durch Ableitung von  $\exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k) = x$  für  $|x| < 1$ ).

### C. Konvexe und konkave Funktionen

**(19.8) Definition:** Eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  heißt *konvex*, wenn für alle  $x, y \in I$  und alle  $t \in [0, 1]$  die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Sie heißt *strikt* (oder *streng*) *konvex*, wenn die Ungleichung jeweils strikt erfüllt ist.  $f$  ist (strikt) *konkav*, wenn  $-f$  (strikt) konvex ist.

$$\text{Äquivalenz: } f \text{ konvex} \iff \forall x, y, z \in I: x < z < y \implies f[z; x] \leq f[y; x] \leq f[y; z]$$

**(19.9) Satz:** Für eine Funktion  $f; I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  gilt:

1° Wenn  $f$  konvex ist, ist  $f$  auch stetig.

2° Für differenzierbare  $f$  ist  $f$  genau dann konvex, wenn  $f'$  monoton wachsend ist.

3° Für zweimal differenzierbare  $f$  ist genau dann konvex, wenn  $f'' \geq 0$  gilt.

Anwendungen:

**(19.10) Lemma:** Für  $p, q \in ]1, \infty[$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0, y > 0$  :

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Die  $p$ -Norm für  $z \in \mathbb{C}^n$  bzw.  $z \in \mathbb{R}^n$  mit  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  ist

$$\|z\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |z_j|^p},$$

wobei  $p \in ]1, \infty[$ .

**(19.11) Höldersche Ungleichung:** Für  $p, q \in ]1, \infty[$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt für alle  $z, w \in \mathbb{C}^n$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ :

$$\sum_{j=1}^n |z_j w_j| \leq \|z\|_p \|w\|_q.$$

[30.01.07]

Für das (euklidische Standard-) Skalarprodukt für  $z, w \in \mathbb{C}^n$  (oder  $\in \mathbb{R}^n$ )

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j$$

folgt sofort:

**(19.12) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:** Für  $z, w \in \mathbb{C}^n$  gilt

$$\langle z, w \rangle \leq \sum_{j=1}^n |z_j w_j| \leq \|z\|_2 \|w\|_2.$$

**(19.13) Minkowski-Ungleichung:** Für  $z, w \in \mathbb{C}^n$  gilt

$$\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p,$$

wobei wieder  $p \in ]1, \infty[$ .

**(19.14) Folgerung:** Für  $p \in ]1, \infty[$  erfüllt  $\|\cdot\|_p$  die Normeigenschaften: Für  $z, w \in \mathbb{K}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) gilt stets:

1°  $\|z\|_p \geq 0$  und  $\|z\|_p = 0 \iff z = 0$ .

2°  $\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$ .

3°  $\|\lambda z\|_p = |\lambda| \|z\|_p$ .

## D. Newtonverfahren

Es geht darum die Nullstelle einer Funktion mit numerischen Methoden zu berechnen.

**(19.15) Newtonverfahren:**  $f : [\xi, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar<sup>3</sup> mit  $f(\xi) = 0$ . Es sei weiterhin  $f'$  monoton wachsend und positiv:  $f' > 0$ <sup>4</sup>.

<sup>3</sup>d.h.  $f$  ist differenzierbar und die Ableitung  $f'$  ist stetig.

<sup>4</sup>diese beiden Bedingungen bedeuten nach dem Vorangehenden, dass  $f$  strikt monoton wachsend und konvex ist.

Dann gilt für jede Wahl von  $x_0 \in ]\xi, b]$ , dass die durch die Rekursion

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

definierte Folge (monoton fallend) gegen  $\xi$  konvergiert.

Für die Funktion  $f(x) := x^2 - c$ ,  $c > 0$ , ist die Nullstelle  $\xi > 0$  die Wurzel  $\xi = \sqrt{c}$  und das Verfahren ist mit dem in 7.12 behandeltem Verfahren zur konkreten Berechnung der positiven Wurzel identisch:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right).$$

**(19.16) Zusatz:** Ist die Funktion  $f$  dreimal stetig differenzierbar, so hat man quadratische Konvergenz, d.h. es gibt eine Konstante  $A > 0$ , so dass stets

$$|x_{n+1} - \xi| \leq A |x_n - \xi|^2.$$

[[Beweis:<sup>5</sup> Wir definieren  $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ,  $x \in [\xi, b]$ , und erhalten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\Phi$  auf  $[\xi, b]$  mit  $\Phi(\xi) = \xi$  und  $\Phi'(\xi) = 0$ . Die Taylorentwicklung in  $\xi$  (bis zur Ordnung 2) liefert deshalb

$$\Phi(x_n) = \xi + \frac{1}{2} \Phi''(\eta_n)(x_n - \xi)^2$$

mit geeigneten  $\eta_n$  zwischen  $\xi$  und  $x_n$ . Daher ist mit  $A := \max\{\frac{1}{2} |\Phi''(x)| : x \in [\xi, b]\}$  wegen  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$

$$|x_{n+1} - \xi| \leq A |x_n - \xi|^2.$$

]]

Bemerkung:  $\Phi(x)$  ist die Nullstelle der Tangente durch  $(x, f(x))$  an den Graphen  $\Gamma_f$  und es gilt  $\xi \leq \Phi(x)$  wegen der Konvexität von  $f$ . (Begründung: Nach Mittelwertsatz 17.3 und weil  $f'$  wächst, gilt  $f[\xi; x] = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq f'(x)$  für  $\xi < x < b$ , also  $\frac{f(x)}{f'(x)} \leq x - \xi$ , d.h.  $\xi \leq x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \Phi(x)$ .) Also ist  $\Phi([\xi, b]) \subset [\xi, b]$ . Die Bestimmung der Nullstelle läuft daher auf eine Fixpunktaufgabe hinaus:  $\xi$  ist Fixpunkt von  $\Phi$  und es gibt nur diesen Fixpunkt. Wenn man von einem  $b$  ausgeht, das klein genug ist, so dass  $q := A(b - \xi) < 1$  gilt, so ist  $\Phi$  eine kontrahierende Abbildung, d.h. für  $x, y \in [\xi, b]$  gilt stets

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq q |x - y|$$

(mit  $q < 1$ ) und für solche Abbildungen gilt ganz allgemein:

**(19.17) Satz:** (Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen)<sup>6</sup>  $\Phi$  hat genau einen Fixpunkt  $\xi$ , und dieser kann als Grenzwert der durch die Iteration  $x_{n+1} := \Phi(x_n)$  gegebenen konvergenten Folge  $(x_n)$  mit beliebigen  $x_0 \in [\xi, b]$  gewonnen werden.

[[Beweis dazu: Durch Induktion zeigt man  $|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|$ , also ist  $(x_n)$  Cauchyfolge und daher konvergent mit Grenzwert  $a$ . Außerdem gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \Phi(a),$$

das heißt  $a$  ist Fixpunkt. Ein weiterer Fixpunkt  $a'$  erfüllt  $|a' - a| = |\Phi(a') - \Phi(a)| \leq q |a' - a| < |a' - a|$ , also ist  $a' = a$ . ]]

Solche Fixpunktsätze werden uns noch oft begegnen.

<sup>5</sup>nicht vorgetragen

<sup>6</sup>in der Vorlesung nur kurz erwähnt und nicht bewiesen