Version 23.01. Dezember 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung
Martin Schottenloher

$\infty \infty \infty$

Kapitel V. Stetige Funktionen in einer Veränderlichen

Es werden in diesem Kapitel Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ studiert, die auf einer nichtleeren Menge $D \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Meistens ist D ein Intervall. Im Zentrum der mathematischen Untersuchung aus der Sicht der Analysis steht das Verhalten der Funktionswerte von $f(x)$ bei kleinen Änderungen der Argumente $x \in D$.

§13 Der Begriff der stetigen Funktion

(13.1) Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt *stetig im Punkte* $a \in D$, wenn für alle konvergenten Folgen (a_n) mit $a_n \in D$ und $a_n \longrightarrow a$ stets $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ gilt. Sie heißt *stetig* in D, wenn sie in allen Punkten aus D stetig ist.

(13.2) Beispiele:

1° Jede konstante Funktion $f(x) := c$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

2° Die „Identität" $f(x) := x$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$.

3° Die Exponentialfunktion $f(x) := e^x$, $x \in D = \mathbb{R}$, ist stetig in allen $a \in \mathbb{R}$. Das folgt aus dem Additionstheorem und der folgenden Aussage: [19.12.06]

(13.3) Lemma: $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \longrightarrow 0$, $\Longrightarrow$ $e^{z_n} \longrightarrow 1 = e^0$.

(Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, dass alle konvergenten Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion definieren.)

(13.4) Satz: (Permanenzeigenschaften) $f, g : D \to \mathbb{R}$ *seien stetig in* $a \in D$, $D \subset \mathbb{R}$. *Dann:*

1° $f + g$ *ist stetig in* a.

2° fg *ist stetig in* a.

3° *Im Falle* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$ *ist auch* $\frac{f}{g}$ *in* a *stetig.*

4° $\min\{f, g\}$ *und* $\max\{f, g\}$ *sind stetig in* a.

5° $f_+ := \max\{f, 0\}$ *und* $f_- := \max\{-f, 0\}$ *sind stetig in* a *und daher auch* $|f| = f_+ + f_-$.

(13.5) Weitere Beispiele:

1° Alle Monome, $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, sind stetige Funktionen.

2° Alle Polynome $P(x) := \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ sind stetig in $\mathbb{R}$ ($c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$).

3° Für $k \in N_1$ ist auch die Funktion $x \mapsto x^{-k}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, stetig.

4°Für Polynome P, Q sind die rationalen Funktionen $\frac{P}{Q}$ in $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q(x) \neq 0\}$ stetig.

(13.6) Satz: (Stetigkeit der Komposition) *Die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *sei in* $a \in D$ *stetig, und die Funktion* $g : E \to \mathbb{R}$ *sei in* $b \in E$ *stetig. Gilt dann* $f(D) \subset E$ *(damit die Komposition* $g \circ f$ *gebildet werden kann) und* $b = f(a)$*, so ist die Komposition* $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ *in* $a \in D$ *stetig.*

Also sind Funktionen wie e^{x^2}, $\sin(e^x - x^2)$, $(e^x + |x|)^n$ ... stetige Funktionen.

(13.7) Weitere Beispiele und Gegenbeispiele:

1° Jede beliebige Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist stetig in allen Punkten $a \in \mathbb{Z}$.

2° Sei $a \in D$ mit der Eigenschaft: Es gibt $r > 0$, so dass $U_r(a) \cap D = \{a\}$. Dann ist jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in a stetig.

3° Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ ist nicht stetig in 0; sie ist in allen anderen Punkten $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig.

4° Sei $f(x) := x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$. f ist in allen Punkten $a \in \mathbb{Z}$ nicht stetig, ansonsten stetig.

5° Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist in allen Punkten $a \in \mathbb{R}$ unstetig. Die Restriktion $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist stetig (weil konstant: $f|_{\mathbb{Q}} = 1$).

(13.8) Satz: (ε-δ-Formulierung der Stetigkeit) *Für eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *und einen Punkt* $a \in D$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° f *ist stetig in* a.

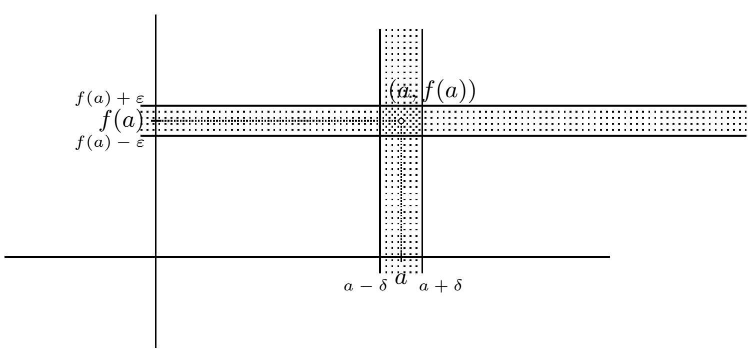
2° *Es gibt ein* $r > 0$*, so dass die Restriktion* $f|_{U_r(a)\cap D} : U_r(a) \cap D \to \mathbb{R}$ *in* a *stetig ist.*

2• *Für alle* $r > 0$ *ist die Restriktion* $f|_{U_r(a)\cap D} : U_r(a) \cap D \to \mathbb{R}$ *stetig in* a.

3° $\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall x \in D : |a - x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

4° $\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 : f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a))$. [22.12.06]

(Beachte: $U_\delta(a) =]\, a - \delta, a + \delta [$, $U_\varepsilon(f(a)) =]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon [$)



Das Bild soll die folgende Aussage zur Stetigkeit veranschaulichen: Wenn f in a stetig ist, findet man zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$, so dass der auf $U_\delta(a)$ bezogene Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in U_\delta(a) \cap D\}$ von f ganz in dem Rechteck $]\, a - \delta, a + \delta \,[\times]\, f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon \,[$ enthalten ist.

(13.9) Definition: $f : D \to \mathbb{R}$ sei auf einer Menge D definiert, und $b \in \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft: $\forall r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$. Dann hat definitionsgemäß f den *Grenzwert* C *bei* b (oder für $x \to b$), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - b| < \delta \implies |f(x) - C| < \varepsilon\,.$$

Notation:

$$C = \lim_{x \to b} f(x) \quad \text{oder genauer} \quad C = \lim_{x \to b, x \in D} f(x)\,.$$

(13.10) Satz: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$: Dann ist f genau dann in a stetig, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt. Ausführlich:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = C \quad \text{und} \quad C = f(a).$$

(13.11) Bemerkung: $C = \lim_{x \to b} f(x) \iff$ Für jede Folge (x_n), $x_n \in D$, mit $x_n \longrightarrow b$ gilt $f(x_n) \longrightarrow C$.

(13.12) Bemerkung: Für $D = \,]\,a, b\,[$ gilt $b \notin D$, aber die Voraussetzung (vgl. 13.9) $\forall\, r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset$ ist erfüllt.

(13.13) Definition: Für eine Teilmenge $D \in \mathbb{R}$ heißt $b \in \mathbb{R}$ ein *Berührpunkt von* D, wenn $\forall\, r > 0 : U_r(b) \cap D \neq \emptyset\,.$

Die Menge der Berührpunkte von D heißt die *abgeschlossen Hülle von* D und wird mit $\overline{D}$ bezeichnet.

Ein Berührpunkt b von D heißt *Häufungspunkt von* D, wenn $\forall\, r > 0 : (U_r(b) \setminus \{b\}) \cap D \neq \emptyset\,.$

(13.14) Lemma:

1° *Ein Punkt $b \in D$ ist immer Berührpunkt von D, also $D \subset \overline{D}$, während nicht jeder Punkt $b \in D$ auch ein Häufungspunkt sein muss. Beispiel: $D = \{0\}$ oder allgemeiner wie in 13.7.2°.*

2° *Die abgeschlossene Hülle $A := \overline{D}$ ist (folgen-)abgeschlossen in folgendem Sinne: Für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ gilt $\lim x_n \in A$, und A ist die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft, die D enthält.*

Das ist der Beginn der Topologie!

Eine natürliche Frage zum Schluss des Paragraphen: Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Hat f eine stetige Fortsetzung nach $\overline{D}$? Das heißt: Gibt es eine Funktion $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}$ mit $\overline{f}|_D = f$, die stetig ist?

Diese Frage ist gleichbedeutend damit, ob für $b \in \overline{D} \setminus D$ stets der Grenzwert $\lim_{x \to b} f(x)$ existiert. Wenn das der Fall ist, so ist $\overline{f}(b) := \lim_{x \to b} f(x)$ stetige Fortsetzung. Daran sieht man: Eine stetige Fortsetzung ist – im Falle der Existenz – eindeutig bestimmt.

(13.15) Beispiele:

1° $f :]\,0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = x$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]\,0, 1]} = [\,0, 1]$ mit $\overline{f}(0) := 0$.

2° $f :]\,0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^{-1}$ hat keine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]\,0, 1]} = [\,0, 1]$, denn für $x_n := \frac{1}{n} \to 0$ ist $f(x_n) = n$ keine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge.

3° $f : [\,0, 1[\to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{[\,0, 1[} = [\,0, 1]$ mit $\overline{f}(1) := 2$.

4° $f\ :]\,0,1] \to \mathbb{R}\,,\, f(x) = x^{-1}\sin x$ hat stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{]\,0,1]} = [0,1]$ mit $\overline{f}(0) := 1$.

§14 Lipschitzbedingung und Stetigkeit

(14.1) Definition: $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

1° f heißt *lipschitzstetig* (*erfüllt eine Lipschitzbedingung*), wenn es eine Konstante $L > 0$ (die *Lipschitzkonstante*) gibt, so dass für alle $x, y \in D$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\ .$$

2° f heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn es zu jedem Punkt $a \in D$ ein $r > 0$ gibt, so dass die Restriktion $f|_{U_r(a)\cap D}$ lipschitzstetig ist.

(14.2) Bemerkungen und Beispiele:

1° Lipschitzstetige Funktionen sind stetig.
2° Lokal lipschitzstetige Funktionen sind ebenfalls stetig.
3° $f(x) = x$ und $g(x) = |x|$ sind lipschitzstetige Funktionen.
4° $f(x) = x^2$ ist nicht lipschitzstetig (auf ganz $\mathbb{R}$), aber lokal lipschitzstetig.
5° $f(x) = \sqrt{|x|}\,,\, x \in \mathbb{R}\,$, ist stetig, aber nicht lokal lipschitzstetig.

(14.3) Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn [09.01.07]

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall\,x, y \in D : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

(14.4) Satz: *Jede lipschitzstetige Funktion ist in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig.*

(14.5) Satz: $f = \sum a_n T^n$ *sei konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho_f > 0$. *Dann ist für* $0 < r < \rho_f$ *die durch* f *gegebene Funktion*

$$x \mapsto \hat{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\ |x| \leq r\ ,$$

lipschitzstetig auf $[-r, r]$ *. Insbesondere ist* $\hat{f}$ *stetig auf* $]-\rho_f, \rho_f[$ *und wird auch mit* f *bezeichnet.*

(14.6) Identitätssatz: Für zwei konvergente Potenzreihen $f = \sum a_n T^n\,,\ g = \sum b_n T^n$ mit Konvergenzradien größer als $r > 0$ seien die Funktionen $\hat{f}$ und $\hat{g}$ auf dem Intervall gleich, also $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ für alle $x \in [-r, r]$. Dann sind die Potenzreihen identisch, d.h. $f = g$, also $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folgerung gilt auch, wenn es eine Nullfolge (x_n) mit $0 < |x_n| < r$ gibt, für die stets $\hat{f}(x_n) = \hat{g}(x_n)$ gilt.

§15 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Unter einem kompakten Intervall versteht man ein Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a \le b < \infty$.

In diesem Paragraphen sei I stets ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ immer eine stetige Funktion auf diesem Intervall.

Wesentlich ist die folgende wohlbekannte Eigenschaft von I (vgl. §8):

(15.1) Satz: *Jede Folge (x_n), $x_n \in I$, hat eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in I$.*

(15.2) Satz: *f ist beschränkt: Es gibt $M > 0$ mit $|f(x)| \le M$ für alle $x \in I$.*

(15.3) Satz: *f nimmt Supremum und Infimum an: Es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in I$ mit $f(x_{\min}) = \inf f(I) = \min f(I)$ und $f(x_{\max}) = \sup f(I) = \max f(I)$.*

(15.4) Zwischenwertsatz: *Zu jedem Wert η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.*

(15.5) Folgerungen:

1° Das Bild $f(J)$ eines Intervalls unter einer stetigen Abbildung $f : J \to \mathbb{R}$ ist wieder ein Intervall. Für eine kompaktes Intervall I ist $f(I)$ wieder ein kompaktes Intervall, und zwar gilt: $f(I) = [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$.

2° Sei $f(a)f(b) < 0$. Dann hat f eine Nullstelle $\xi \in I : f(x) = 0$ hat eine Lösung, nämlich ξ.

3° Jedes Polynom $f = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ungeraden Grades n hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ ($c_k \in \mathbb{R}, c_n \neq 0, n$ ungerade).

4° f ist genau dann injektiv, wenn f strikt monoton ist (also entweder strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend). Dabei heißt f *strikt monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in I$ gilt: $x < y \implies f(x) < f(y)$. Analog ist „*strikt monoton fallend*“ definiert.

5° (Fixpunktsatz) Im Falle $f(I) \subset I$ hat f einen Fixpunkt $\xi \in I$, d.h. $f(\xi) = \xi$.[1] Diese Aussage ist für nichtkompakte Intervalle falsch.

[[Beweis von 4°: Natürlich ist jede strikt monotone Funktion injektiv. Sei also $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall und injektiv. Es gilt zu zeigen, dass f strikt monoton ist. Seien $\alpha, y \in I$ beliebig mit $\alpha < y$. Nach Voraussetzung ist $f(\alpha) \neq f(y)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist $f(\alpha) < f(y)$. Sei $x \in [\alpha, y[$. Nach Zwischenwertsatz kann nicht $f(x) \ge f(y)$ gelten, denn wegen $f(y) \in [f(\alpha), f(x)]$ gäbe es dann ein $\xi \in [\alpha, x]$ mit $f(\xi) = f(y)$ und $\xi \le x < y$ im Widerspruch zur Injektivität von f. Genauso folgt $f(x) < f(y)$ für $x < \alpha$. Daher gilt für alle $y \in I$ und alle $x \in I$ mit $x < y$ stets $f(x) < f(y)$. Also ist f strikt monoton wachsend. (Der Beweis funktioniert für ein nichtkompaktes Intervall I.)

Beweis von 5°: Es ist auch $g(x) := f(x) - x$, $x \in I = [a, b]$, stetig. Nach Voraussetzung gilt ferner $f(a) \in I$, also $f(a) \ge a$, und daher $g(a) \ge 0$. Ebenso ergibt sich $g(b) \le 0$. Nach Zwischenwertsatz existiert daher ein $\xi \in I$ mit $g(\xi) = 0$. ξ ist der gewünschte Fixpunkt: $f(\xi) = \xi$.

$f(x) = x + 1$ ist ohne Fixpunkt in $I = \mathbb{R}$, und auch $f(x) = x^2 + x - 1$, $x \in]-1, 1[$, in $I =]-1, 1[$.]]

(15.6) Definition: Die kleinste positive Nullstelle von $\cos$ wird als die Hälfte von π definiert: $\pi := 2 \min\{x > 0 \mid \cos x = 0\}$.

[12.01.07]

[1] 4° und 5° sind in der Vorlesung nicht behandelt worden, stattdessen aber in den Übungen.

Es ist

$$\sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6 - \sqrt{12}}$$

mit $1,41 < \sqrt{2}$ und $\sqrt{6-\sqrt{12}} < 1,6$.

Aus $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ folgt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Daraus ergibt sich mit Hilfe des Additionstheorems (12.2) unmittelbar:

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1\,,$$

sowie $e^{2\pi k i} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(15.7) Bemerkung: Für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist φ die (orientierte, elementargeometrische) Bogenlänge des Einheitskreisbogens in $\mathbb{C}$ von 1 nach $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ in folgendem Sinne:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| e^{i\frac{k}{n}\varphi} - e^{i\frac{k-1}{n}\varphi} \right| = \varphi\,.$$

Insbesondere ist $\pi/2$ in diesem Sinne die Länge des Viertelkreisbogens, π also die Länge des Halbkreisbogens, und das bedeutet, dass diese eigentliche Definition von π (15.6) mit der früheren, vorläufigen Definition (vgl. 7.12.4°) zusammenpasst.

[[Beweis und weitere Erläuterung: Für $n \in \mathbb{N}_1$ setzen wir $P_{n,k} := e^{i\frac{k}{n}\varphi} = \cos\frac{k}{n}\varphi + i\sin\frac{k}{n}\varphi$. Die Summe $L_n := \sum_{k=1}^{n} \left| e^{i\frac{k}{n}\varphi} - e^{i\frac{k-1}{n}\varphi} \right| = \sum_{k=1}^{n} |P_{n,k} - P_{n,k-1}|$ ist also die Länge des durch die Punkte $P_{n,k} \in \mathbb{S}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, gegebenen Polygonzugs von $P_{n,0} = 1$ nach $P_{n,n} = e^{i\varphi}$. Zu zeigen ist

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \varphi\,.$$

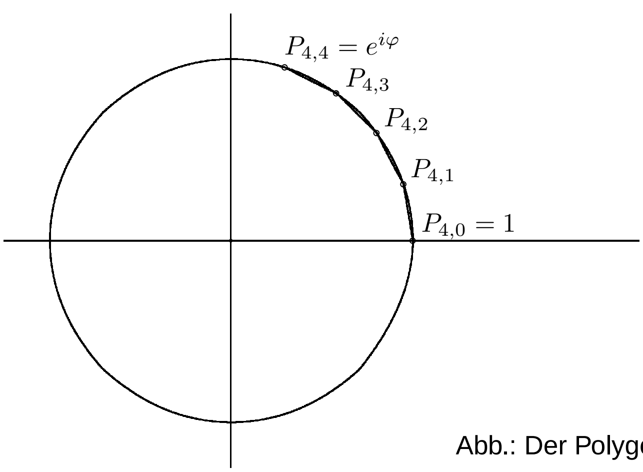


Abb.: Der Polygonzug für $n = 4$

Es ist

$$|P_{n,k} - P_{n,k-1}| = \left| e^{i\frac{2k-1}{2n}\pi} \right| \left| e^{i\frac{1}{2n}\pi} - e^{-i\frac{1}{2n}\pi} \right| = \left| 2\sin\frac{1}{2n}\varphi \right|\,.$$

Aus der Abschätzung $x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x$ für $0 < x < 2$ ergibt sich zunächst, dass $\sin\frac{1}{2n}\varphi$ positiv ist, also $|P_{n,k} - P_{n,k-1}| = 2\sin\frac{1}{2n}\varphi$ und daher

$$L_n = 2n\sin\frac{1}{2n}\varphi$$

gilt. Weiterhin folgt aus der Abschätzung, dass

$$\left| \frac{1}{2n}\varphi - \sin\frac{1}{2n}\varphi \right| < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n}\varphi \right)^3$$

gilt, daher $\left|\frac{1}{2n}\varphi - \sin\frac{1}{2n}\varphi\right| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Damit ist $\lim L_n = \varphi$ bewiesen.]]

(15.8) Folgerung: Die Restriktion $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ der Cosinusfunktion auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist surjektiv und injektiv. Aus diesem Resultat folgert man die Existenz von Polarkoordinaten: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte $r \in]0, \infty[$ und $\varphi \in [0, \pi[$ mit $z = re^{i\varphi}$.

[[(Bei der ersten Aussage handelt es sich um eine weitere Folgerung aus dem Zwischenwertsatz 15.4.)

Beweis: Zu jedem $x \in [0,1]$ gibt es wegen der Stetigkeit von $\cos$ und wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ein $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos\varphi = x$. Also ist $[0,1]$ in $\cos([0, \frac{\pi}{2}])$ enthalten. Da außerdem $|\cos\varphi| \leq 1$ (wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$) und $\cos\varphi > 0$ für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (da $\frac{\pi}{2}$ kleinste positive Nullstelle von $\cos$ nach Definition 15.6), gilt $[0,1] = \cos([0, \frac{\pi}{2}])$. Also ist $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ surjektiv. Die Injektivität lässt sich aus 15.9.4° folgern, wird aber für den Nachweis der Existenz der Polarkoordinaten nicht benötigt.

Zu den Polarkoordinaten:

1. Wir setzen zunächst $|z| = 1$ und $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ voraus. Dann findet man wegen der gerade bewiesenen Surjektivität von $\cos$ ein $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\operatorname{Re} z = \cos\varphi$. Es folgt für $\sin\varphi$: $|\sin\varphi| = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \operatorname{Im} z$ und da $\sin$ im Bereich $[0, \frac{\pi}{2}]$ nicht negativ ist, gilt $\operatorname{Im} z = \sin\varphi$. Insgesamt also $z = e^{i\varphi}$.

2. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ wird durch geeignete Multiplikation $w = i \cdot z$, $w = -z$ oder $w = -i \cdot z$ erreicht, dass $|w| = 1$ mit $\operatorname{Re} w \geq 0$ und $\operatorname{Im} w \geq 0$ gilt, und daher 1. anwendbar wird.

3. Für allgemeine $z \neq 0$ folgt die Existenz von $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $z = re^{i\varphi}$, indem 2. auf $w = \frac{1}{r}z$ mit $r := |z|$ angewandt wird.

4. Offensichtlich ist $r = |z|$ eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit von $\varphi \in [0, 2\pi[$ folgt schließlich aus dem nachfolgenden Resultat 15.9.4°, dass $e^{it} = 1$ genau dann richtig ist, wenn t die Form $t = 2\pi n$, oder ebenso aus der Injektivität von $\cos$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.]]

(15.9) Satz: Für alle $z \in \mathbb{C}$, alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

1° $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$, $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$

2° $\sin(z + \pi) = -\sin z$, $\cos(z + \pi) = -\cos z$.

3° $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$. Also $e^{z + 2\pi i k} = e^z$.

4° $e^{i\varphi} = 1 \iff \exists\, n \in \mathbb{Z} : \varphi = 2\pi n$.

(15.10) Satz: *Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist dort gleichmäßig stetig.*