Version 23.11. November 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel II. Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen werden in diesem Kapitel **axiomatisch** eingeführt als die Elemente des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. $\mathbb{R}$ wird als vollständig angeordneter Körper charakterisiert. Entsprechend haben wir in diesem Kapitel einen Paragraphen über die *Körpereigenschaften* (§4), einen weiteren über *angeordnete Körper* (§5) und einen abschließenden Paragraphen (§6) über die *Vollständigkeit* von angeordneten Körpern.

§4 Körper

(4.1) Definition: Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei *Verknüpfungen* $+ : K \times K \to K$ sowie $\cdot : K \times K \to K$ und den ausgezeichenten Elementen $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$, so dass die folgenden aus §2 und §3 bekannten Axiome erfüllt sind: A.1 - A.4, M.1 – M.4 und D, also

$$\forall\, a, b, c \in K$$

A.1	$(a+b)+c = a+(b+c)$	M.1	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
A.2	$a+b = b+a$	M.2	$a \cdot b = b \cdot a$
A.3	$a+0 = a$	M.3	$a \cdot 1 = a$
A.4	$\exists\, x \in K : a+x = b$	M.4	$a \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, x \in K : a \cdot x = b$

D $\quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

(4.2) Beispiele:

1° $\mathbb{Q}$ ist ein Körper nach 3.4. $\mathbb{R}$ aus dem Vorwissen (der Schule zum Beispiel) oder entsprechend der zum Ende des Paragraphen 3 beschriebenen Konstruktion ist ebenfalls ein Körper.

2° $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist ein Körper, der eine Lösung zu $x^2 = 5$ hat (vgl. Übungen in MIB); entsprechend $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$, aber auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$, etc. Wir erhalten so unendlich viele verschiedene Körper.

3° Der Minimalkörper aus zwei Elementen: $\mathbb{Z}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ([1]).

4° Zu jeder Primzahl p findet man einen Körper $\mathbb{Z}_p$([1]) mit genau p Elementen: Dazu muss auf der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$([1]) mit p Elementen die natürliche Multiplikation betrachtet werden. $p = 2$ ist das Beispiel 3°. $\mathbb{Z}_3$([1]) wird in den Übungen behandelt.

5° $\mathbb{N}$ ist nicht Körper, da nicht einmal die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar ist.

[1] Diese Notation ist nicht die in der Literatur verbreitete. Die zyklische Gruppe mit n Elementen (und seiner Ringstruktur) wird meist mit $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ oder $\mathbb{Z}/_{(n)}$ oder $\mathbb{Z}/_{\mathrm{mod}\ n\mathbb{Z}}$ bezeichnet. Der Körper mit p Elementen dagegen mit $\mathbb{F}_p$.

6° In $\mathbb{Z}$ ist die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar ($\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe, vgl. 3.2). Aber auch $\mathbb{Z}$ ist nicht Körper, da in $\mathbb{Z}$ die Division nicht uneingeschränkt durchführbar ist (vgl. §3).

(4.3) Bemerkung: Ist K ein Körper mit den neutralen Elementen $0, 1 \in K$, so ist sowohl K bezüglich $+$ und 0 eine abelsche Gruppe als auch $K^* := K \setminus \{0\}$ bezüglich $\cdot$ und 1.

Umgekehrt gilt: Sei K eine Menge mit zwei Verknüpfungen $K \times K \to K$, geschrieben als Addition $+$ und als Multiplikation $\cdot$, sowie mit zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in K$. Ist dann K mit $+$ und 0 eine abelsche Gruppe und gilt das auch für $K^* := K \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ und 1, so ist K ein Körper, wenn zusätzlich das Distributivgesetz D gilt.

(4.4) Folgerungen: Sei K ein Körper. Dann gilt für beliebige $a, b, c \in K$:

1° $a + b = a + c \Rightarrow b = c$,

2° $a \neq 0$ und $ab = ac \Rightarrow b = c$,

3° $0 \in K$ ist eindeutig als neutrales Element der Addition.

4° $1 \in K$ ist eindeutig als neutrales Element der Multiplikation.

5° $(a + b)c = ac + bc$.

Notationen:

ab anstelle von $a \cdot b$ haben wir schon verwendet.

Die nach 4.4.1° eindeutig bestimmte Lösung x in $a + x = b$ wird auch als $b - a$ geschrieben; im Falle $b = 0$ auch $-a := 0 - a$.

Die im Falle von $a \neq 0$ nach 4.4.2° eindeutig bestimmte Lösung x von $ax = b$ wird auch als $\frac{b}{a}$ oder manchmal $b : a$ geschrieben; im Falle $b = 1$ auch $a^{-1} := \frac{1}{a}$.

(4.5) Rechenregeln: In einem Körper K gilt für alle $a, b, c, d \in K$:

1°	$-0 = 0$	$-(-a) = a$	$b - a = b + (-a)$
	$-(a + b) = -a - b$	$-(a - b) = -a + b$	
2°	$a0 = 0$	$(-a)b = -(ab) - ab$	$(-a)(-b) = ab$
	$-a = (-1)a$	$a(b - c) = ab - ac$	
3°	$ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ und $b \neq 0$		
	$ab \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$		
4°	$a = \frac{a}{1}$		
	$b \neq 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$		
5°	$bd \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$		

[7.11.6]

(4.6) Definition: Es sei K ein Körper. Für $a, a_j \in K$ und für natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert:

1° $n \cdot a = na$ durch: $0 \cdot a := 0$ (es handelt sich hier um verschiedene Nullen!) und $(n+1) \cdot a := n \cdot a + a$. Der Körper hat die *Charakteristik* 0, wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_1$.

2° a^n durch: $a^0 := 1$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

3°

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m \quad ; \quad \sum_{k=m}^{n+1} a_k := \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}$$

mit der Konvention
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$$
im Falle von $n < m$.

4° Analog das Produktzeichen (vgl. §1):
$$\prod_{k=m}^{n} a_k\,.$$

(4.7) Satz: *Für Elemente $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ und $b_1, b_2, \dots, b_m \in K$ eines Körpers K gilt:*

1° *Für jede Bijektion $\sigma : A(n) \to A(n)$ ist*
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

2° *Die Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist unabhängig von jedweder Klammerung.*

3° *Sei $\tau : A(nm) \to A(n) \times A(m)$ eine beliebige Anordnung von $A(n) \times A(m)$. Dann gilt für* $c_p := a_j b_k$, wobei $p \in A(nm)$ mit $\tau(p) = (j,k)$:
$$\sum_{p=1}^{nm} c_p = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)$$
und wir schreiben
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j b_k := \sum_{p=1}^{nm} c_p\,.$$

Ebenso für mehr als zwei Summen mit $a^{(\mu)}_{j_\mu} \in K$ für $1 \le j_\mu \le n_\mu$, $n_\mu \in \mathbb{N}_1$:
$$\prod_{\mu=1}^{m}\sum_{j_\mu=1}^{n_\mu} a^{(\mu)}_{j_\mu} = \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} a^{(1)}_{j_1}\right)\left(\sum_{j_2=1}^{n_2} a^{(2)}_{j_2}\right)\dots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m} a^{(m)}_{j_m}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m} a^{(1)}_{j_1} a^{(2)}_{j_2}\dots a^{(m)}_{j_m}$$

Analog für das Produkt: Für jede Bijektion $\sigma : A(n) \to A(n)$ ist $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ Und einfach $\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\prod_{k=1}^{m} b_k\right) = \prod_{j=1}^{n+m} c_j$, wobei $c_j := a_j$ für $j \in A(n)$ und $c_{n+k} := b_k$ für $k \in A(m)$.

§5 Angeordnete Körper. Das archimedische Axiom

(5.1) Definition: Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper zusammen mit einer Relation $< \subset K \times K$ (geschrieben $a < b$ für $(a,b) \in <$), so dass die aus §2 bekannten Axiome O.1 – O.4 gelten (vgl. 2.7). Also

$\forall\, a,b,c \in K$

O.1 $a < b$ und $b < c \;\Rightarrow\; a < c$

O.2 Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$

O.3 $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$

O.4 $a < b$ und $0 < c \;\Rightarrow\; ac < bc$

Zur Abkürzung wieder wie in Kap. I:
$a \leq b$ anstelle von „$a < b$ oder $a = b$“;
$a > b$ statt $b < a$;
$a \geq b$ anstelle von „$a > b$ oder $a = b$“.

(5.2) Regeln: Die folgenden Regeln gelten in einem angeordneten Körper K für alle $a, b, c, d \in K$:

1° $a < b \Rightarrow 0 < b - a$, inbesondere: $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$.
2° $0 < a, 0 < b \Rightarrow (0 < a + b$ und $0 < ab)$.
3° $-1 < 0$, $0 < 1$.
4° $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
5° $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
6° $0 < a, 0 < b, 0 < c, 0 < d \Rightarrow (\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc)$.
7° $0 < a, 0 < b, n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow (a < b \iff a^n < b^n)$.

(5.3) Bemerkungen und Beispiele:

1° Für angeordnete Körper K gilt also $-1 < 0 < 1$. Daher hat ein angeordneter Körper mindestens 3 Elemente (sogar unendlich viele, wie wir weiter unten sehen werden).

2° Der Minimalkörper $K = \mathbb{Z}_2$ (vgl. 4.2.3°) kann also nicht zu einem angeordneten Körper angeordnet werden.

Beachte: $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ kann angeordnet werden (im Sinne von O.1,O.2), z.B. $\bar{0} < \bar{1}$. Aber mit solch einer Anordnung wird der Minimalkörper niemals zu einem angeordneten Körper.

3° $\mathbb{Q}$ ist angeordneter Körper mit der in 3.3 definierten Ordnung (vgl. 3.4).

4° Auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kann mit einer natürlichen Ordnungsrelation versehen werden, die $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ zu einem angeordneten Körper macht. Analog $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$, etc.

5° $\mathbb{R}$ ist angeordneter Körper (Vorwissen und §6).

6° $\mathbb{Q}(i)$ kann nicht zu einem angeordneten Körper angeordnet werden, weil $i^2 = -1$. Denn in einem angeordneten Körper ist nach 5.2 $-1 < 0$ und $a^2 \geq 0$.

Also kann auch der Körper $\mathbb{C}$ nicht zu einem angeordneten Körper gemacht werden.

7° Sei K ein angeordneter Körper. Dann kann der Körper $K((X))$ der formalen Laurentreihen (vgl. Übungen) zu einem angeordneten Körper angeordnet werden. [10.11.06]

(5.4) Definition: In einem Körper K heißt eine Teilmenge $B \subset K$ *induktiv*, wenn

$$0 \in B \text{ und } \forall\, b \in B : b + 1 \in B\,.$$

(5.5) Satz: *Es sei K ein Körper. Dann ist*

$$\mathbb{N}_K := \{\, x \in K | \forall\, B \subset K \text{ induktiv } \Rightarrow x \in B\,\} = \bigcap \{\, B \,|\, B \in K \text{ induktiv }\,\}$$

eine induktive *Teilmenge von K. $\mathbb{N}_K$ ist die kleinste induktive Menge in K, und kann auch als $\mathbb{N}_K = \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ (vgl. 4.6.1°) beschrieben werden.*

Außerdem ist die Abbildung $S : \mathbb{N}_K \to \mathbb{N}_K\,, b \mapsto b + 1$ wohldefiniert und injektiv.

(5.6) Satz: *Sei K ein angeordneter Körper. Dann ist $\mathbb{N}_K$ mit $e = 0$ und $S : b \mapsto b + 1$ ein System natürlicher Zahlen im Sinne der Definition 2.1, $\mathbb{N}_K$ erfüllt also die Peano-Axiome.*

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_K\,,\ n \mapsto n1$ ist bijektiv mit $n < m \iff \varphi(n) < \varphi(m)$.
Insbesondere hat K unendlich viele Elemente und ist von der Charakteristik 0.

(5.7) Satz: *Jeder angeordnete Körper enthält $\mathbb{Q}$ als angeordneten Teilkörper im folgenden Sinne: Es gibt einen Teilkörper $\mathbb{Q}_K \subset K$ und eine strukturerhaltende Bijektion $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_K$.*

(5.8) Definition: Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch angeordnet*, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl $n \in N$ mit $x < n \cdot 1$ gibt. Anders ausgedrückt: K ist archimedisch, wenn $\mathbb{N}_K$ nicht nach oben beschränkt ist.

(5.9) Satz: *Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist archimedisch angeordnet.*

(5.10) Beispiel: Der Körper $\mathbb{Q}((X))$ der formalen Laurentreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ mit seiner natürlichen Ordnung (vgl. 5.3.7°) ist nicht archimedisch angeordnet.

§6 Vollständig angeordnete Körper: Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Im Folgenden sei K ein angeordneter Körper.

(6.1) Definition: Eine Teilmenge $A \subset K\,,\ A \neq \emptyset$, heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in K$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt: $a \leq b$. b heißt dann eine *obere Schranke von* A.

Analog heißt $B \subset K$ *nach unten beschränkt*, wenn es ein $c \in K$ gibt, so dass für alle $b \in B$ gilt: $c \leq b$. c heißt dann *untere Schranke von* B.

Schließlich heißt eine Teilmenge $A \subset K$ *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben wie auch nach unten beschränkt ist.

$A = \emptyset$ gelte als beschränkt, und alle $b \in K$ sind obere wie auch untere Schranken.

(6.2) Beispiele: Intervalle. Für $a, b \in K$

1° $[a,b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$ (*abgeschlossenes Intervall*)

2° $]a,b[\ := \{x \in K \mid a < x < b\}$ (*offenes Intervall*)

3° $]a,b] := \{x \in K \mid a < x \leq b\}$ (*halboffenes Intervall*)

4° $[a,b[\ := \{x \in K \mid a \leq x < b\}$ (*halboffenes Intervall*)

5° Die Intervalle aus 1° – 4° sind alle beschränkt.

6° $\mathbb{N}_K$ ist nach unten beschränkt.

7° K archimedisch angeordnet $\iff$ $\mathbb{N}_K$ ist nicht nach oben beschränkt.

In $K = \mathbb{Q}((X))$ ist $\mathbb{N} = \mathbb{N}_K$ beschränkt.

8° Endliche Teilmengen von K sind stets beschränkt (Übung).

9° Eine Teilmenge $M \subset K$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein Intervall I gibt, so dass M bereits in I liegt.

[14.11.06]

(6.3) Definition: Sei $A \subset K$ eine nichtleere Teilmenge von K.

• $s \in K$ heißt *Supremum* von A (in Zeichen $s = \sup A$), wenn s die kleinste obere Schranke von A ist. Das bedeutet:

1° s ist obere Schranke von A und

2° für jede weitere obere Schranke b von A gilt $s \leq b$.
s lässt sich auch charakterisieren als die *untere Schranke der oberen Schranken von A.*

• $m \in K$ heißt *Maximum* von A (in Zeichen $m = \max A$), wenn m die kleinste obere Schranke von A ist (also wenn m Supremum A ist) und wenn zugleich $m \in A$ gilt.

Analog: *Infimum* $\inf A$, *Minimum* $\min A$.

(6.4) Beispiele:

1° Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_1$ ist obere Schranke des Intervalls $A := [0,1[\subset \mathbb{Q}$ und es gilt $\sup A = 1$. 1 ist nicht Maximum von A, weil $1 \notin A$. Weiterhin: $0 = \min A$.

2° Die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}$ ist beschränkt, weil $A \subset [-2,2]$ gilt, aber A besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$ und auch kein Infimum, weil $s^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung besitzt (vgl. 3.5).

3° Auch $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : x < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$, obwohl diese Menge nach oben beschränkt ist (obere Schranke ist z.B. 3, vgl. Übungen).

(6.5) Definition: Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig angeordnet*, wenn gilt:

V	Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset K$ besitzt ein Supremum $\sup A \in K$.

(6.6) Satz: *Je zwei vollständig angeordnete Körper K, K' sind strukturgleich (isomorph), d.h. es gibt eine (sogar eindeutig bestimmte) Bijektion $\psi : K \to K'$, welche $+, \cdot, <$ respektiert.*

(6.7) Definition – Axiom: $\mathbb{R}$ ist der vollständig angeordnete Körper.

(6.8) Satz von Archimedes: $\mathbb{R}$ *ist archimedisch angeordnet.*

(6.9) Folgerungen:

1° (Eudoxos) Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon > \frac{1}{n} > 0$.

2° Für $A \subset \mathbb{Z}$ gilt: Ist A nach oben beschränkt und $A \neq \emptyset$, dann existiert $\max A$.

(6.10) Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ ist $[a] := \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq a\}$ („größte ganze Zahl kleiner/gleich a“ oder „der ganze Anteil von a“).

(6.11) Satz: („$\mathbb{Q}$ ist *dicht* in $\mathbb{R}$“)

1° *Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.*

2° *Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $b = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq b\} = \inf\{q \in \mathbb{Q} \mid q > b\}$.*

(6.12) Satz: (Existenz der Wurzel) *Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, mit $x^n = a$.*

Notation: $\sqrt[n]{a} := x$ oder $a^{\frac{1}{n}} := x$. [17.11.06]

(6.13) Folgerung: Die Wurzel ist ordnungstreu: $0 < a < b \iff 0 < a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$.