

## **MIA – Programm zu Ferienkurs MIA – WS 06/07**

∞ ∞ ∞

Zeit und Ort: Täglich 10–13 Uhr und 14–17 Uhr  
Kurs 1: 5.– 9.3.07, Kurs 2: 19.– 23.3.07, Kurs 3: 30.3.– 5.4.07

### **Ziel und Organisation**

Das Ziel des Ferienkurses ist es, den Stoff der Vorlesung MIA zu wiederholen, zu festigen und zu vertiefen. Der Kurs soll damit eine Grundlage für die anschließende Vorlesung MIIA geben. Es wird keine Leistung abgefragt oder honoriert, es geht nur darum, dass jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer<sup>1</sup> möglichst viel von den grundlegenden Konzepten der elementaren Analysis versteht.

Es zeigt sich, dass die Teilnehmer an solchen Kursen am meisten lernen, wenn Sie selber einen Teil des Stoffes erklären müssen. Beim Erklären und bei der Vorbereitung dazu lernt nicht nur der Vortragende besonders viel, sondern es entwickelt sich oft eine gute Diskussion, die dann für alle Teilnehmer neue Chancen bieten, den jeweiligen Gegenstand noch besser zu verstehen.

Daher sind 10 Vorträge fest eingeplant, die Inhalte dazu werden weiter unten kurz beschrieben. Diese Vorträge werden von den Teilnehmern vorbereitet, und zwar so, dass für jeden Vortrag in der Regel 2 Teilnehmer für den angesetzten Termin vorbereitet sind. Die Tutoren (für jeden Kurs haben wir zwei Tutoren) unterstützen die Vortragenden und übernehmen gegebenenfalls spontan Teile des Vortrags, wenn das nötig sein sollte. Die Zuordnung, wer für welchen Vortrag vorgesehen ist, geschieht per Mail. Zur Vorbereitung gehört, dass einige einschlägige Präsenzaufgaben und auch vertiefende Aufgaben zum Stoff des Vortrags erarbeitet werden. Diese gehören nicht zum Vortrag, werden aber im Laufe des Tages vorgestellt. Zur Vorbereitung der Vorträge wie auch der Aufgaben kann man sich Hilfe holen bei den jeweiligen Tutoren (die man per Mail erreicht) oder bei mir oder Herrn Tappe. Es wird dringend empfohlen, dass zumindestens die Vortragenden zu den ersten beiden Vorträgen sich bei den Tutoren frühzeitig melden und beraten lassen.

Die Vorträge werden frei an der Tafel gehalten, der Vortragende hat keinen Zettel in der Hand, kann natürlich eine Ausarbeitung zur Kontrolle mit nach Vorne nehmen und ablegen. Die Dauer des Vortrags soll auf etwa 30 Minuten ausgerichtet sein. Unterbrechungen durch Fragen sind ausdrücklich erlaubt und vorgesehen, auch wenn der Vortrag dadurch in seinem Ablauf unterbrochen wird und insgesamt länger dauert. Aber eine fruchtbare Diskussion wird ja ausdrücklich angestrebt.

Es sind noch einige weitere Vorträge thematisch vorbereitet (s.u.). Wer daran interessiert ist oder wer einen zweiten Vortrag aus der Basisserie 1–10 vorbereiten möchte (noch sind nicht

---

<sup>1</sup> „Teilnehmer“ steht im Folgenden immer für Teilnehmer oder Teilnehmerin

alle vergeben), möge sich bald melden. Evtl. ergibt es sich ja auch während des Kurses, dass man diese Vorträge noch zuordnet oder weitere Themen behandelt.

Es ist vorgesehen, in der Vormittagssitzung von 10 – 13 Uhr je zwei der Basisvorträge 1–10 zu halten, in der Reihenfolge wie sie unten aufgeführt sind. Dazu kommen gegebenenfalls auch ergänzende Vorträge. Daneben ist viel Zeit, um sich den Inhalt der Vorträge durch Diskussionen und durch Bearbeitung von Aufgaben zu vertiefen. Insbesondere soll begonnen werden, die von den Vortragenden vorbereiteten Präsenzaufgaben gemeinsam zu bearbeiten. Die Nachmittags-sitzung von 14 – 17 Uhr ist dann ganz den Aufgaben gewidmet. Hier soll auch allgemein gelernt bzw. wiederholt werden, wie man Übungsaufgaben angeht und welche Standards zu erfüllen sind. Vorschläge für Aufgaben von Seiten der Teilnehmer sind hoch willkommen, auch solche, die schon wohl bekannt erscheinen, werden behandelt. Gut wäre ist, wenn Vorschläge schon vorab an die Tutoren geschickt werden. Ansonsten werden die von den Vortragenden vorge-schlagenen Aufgaben sowie von den Tutoren erarbeitete Aufgaben behandelt.

Diese Organisationsform hat sich bewährt. Sie lebt aber von der Mitarbeit der Teilnehmer. Der Kurs soll den Teilnehmern dienen, daher sind natürlich auch Abweichungen möglich, die Art der Durchführung lässt ja sowieso viel Spielraum, auch was Unterbrechungen anbetrifft, oder das Niveau der Aufgaben. Mit diesem Programm und der ersten Zuteilung der Vorträge (Ende Februar) gebe ich die Organisation ab und lege Sie in die Hände der Tutoren. Also: Änderungsvorschläge bitte gleich an die Tutoren.

### **Basisprogramm** 10 Themen als Querschnitt der Vorlesung:

#### 1. **Folgenkonvergenz** – aus metrischer Sicht und aus der Sicht der Anordnung.

Wiederholung des Begriffs der Konvergenz in  $\mathbb{R}$ . Beispiele, warum konvergiert  $(\frac{1}{n})$ ? Monotoniekriterium. Wie sieht der Konvergenzbegriff bei angeordneten Körpern aus? Satz von Bolzano-Weierstrass, Häufungspunkt, Berührungspunkt.

Optional: Man diskutiere die Konvergenz im Körper der Laurentreihen über  $\mathbb{R}$ . – Man zeige, wie man nur mit einer Norm einen Konvergenzbegriff bilden kann. – Vielfältige Aussagen über die abgeschlossenen Hülle einer Menge des  $\mathbb{R}$ .

#### 2. **Die Bedeutung des Zwischenwertsatzes**

Darstellung des Satzes und der genauen Voraussetzungen. Evtl. Durchführung des Beweises mittels Intervallschachtelung (wie fange ich einen Löwen in der Wüste?). Beschreibung der vielen Anwendungen des Satzes. Was steckt hinter dem Satz, warum gilt er? (wegen Addition, Multiplikation, Anordnung, arch. Anordnung, vollst. Anordnung, wegen Satz von Bolzano-Weierstrass?).

Optional: Umkehrung des Satzes. Ist eine Funktion auf einem Intervall schon stetig, wenn sie für jedes kompakte Teilintervall dem Zwischenwertsatz genügt?

#### 3. **Konvergenz von Reihen**

Hier soll nach der Behandlung des Konvergenzbegriffs auf verschiedene Kriterien eingegangen werden. Natürlich, wie überall: Exemplarisch beweisen.

Optional: Reihenkonvergenz und Integration. Zum Beispiel in Königsberger: Integralkriterium.

4. **Konvergente Potenzreihen** – wie sie stetige, differenzierbare und integrierbare Funktionen liefern

Der Titel sagt eigentlich alles. Ein Vorschlag für die Strukturierung: Alles an der allgemeinen binomische Reihe aufziehen.

Optional: Verbindung zum Satz von Taylor herstellen. Insbesondere die Taylorentwicklung in einem beliebigen Punkt des Konvergenzintervalles darstellen, mit Beweisidee. – Alles im Komplexen darstellen. Man erhält Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf Kreisscheiben  $D \subset \mathbb{C}$  mit den entsprechenden Eigenschaften.

5. **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Formulierung und Beweis des Satzes mit einer persönlichen Auswahl von Anwendungen des Satzes (ohne Konvexität und Satz von Taylor, s.u.).

6. **Konvexe Funktionen**

In diesem Vortrag soll die ganze Kraft der Differentialrechnung betont werden: Die Aufgabe lautet also, überzeugend und ausführlich darzulegen, wie sich bestimmte Eigenschaften einer genügend oft differenzierbaren Wachstum, Konvexität, etc. ganz einfach und fundamental durch Bedingungen an die Ableitungen widerspiegeln.

7. **Taylorischer Satz**

Auch mit anderen Restglieddarstellungen (z.B. mit Integral). Analytische Funktionen und Beweis zu dem folgenden Satz: Potenzreihen geben analytische Funktionen in ihrem Konvergenzintervall (vgl. Vortrag 4).

Optional: Divergente Taylorreihen

8. **Umkehrfunktion**

Zeige: Eine streng monotone Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn das Bild  $f(D)$  ein Intervall ist. Die Umkehrung einer streng monotonen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  ist stetig. Wo wird diese Aussage beim Umkehrsatz 18.1 für stetig differenzierbare Funktionen gebraucht? Relevante Beispiele von Umkehrfunktionen und auch ein paar neue (d.h. nicht oder kaum in der Vorlesung behandelte) Umkehrfunktionen.

9. **Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Formulierung und Beweis wie im Skript (21.6). Dazu ein explizites Beispiel. Anwendung: Restglieddarstellung beim Satz von Taylor.

Optional: Bedeutung für die Sehnen trapezregel.

10. **Integral einer stetigen Funktion**

Es soll die Konstruktion des Integrals für stetige Funktionen beschrieben werden (vgl. Beweis zu 20.6). Dazu ein gründlicher Beweis der folgenden Aussage: Für eine stetige

Funktion auf einem Intervall  $[a, b]$  konvergiert jede Folge  $(S_n)$  der Form

$$S_n := \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f(\xi_k^{(n)})$$

gegen das Integral  $\int_a^b f dx$ , wenn  $\xi_k^{(n)}$  zwischen  $a + \frac{k}{2^n}(b-a)$  und  $a + \frac{k+1}{2^n}(b-a)$  liegt. Hinweis: Gleichmäßige Stetigkeit. Diskussion der Regeln 20.8, insbesondere Linearität und Positivität.

**Erweitertes Programm** Und hier die weiteren Themen:

**A Das archimedische Axiom**

Hier sollen gerade auch andere angeordnete Körper als  $\mathbb{R}$  behandelt werden. Und es soll die Bedeutung des Axioms für die Analysis beschrieben werden.

**B Die Zahl  $\pi$ .**

Zeigen, wo  $\pi$  in der Vorlesung (und gegebenenfalls sonstwo) auftritt und Konsistenz prüfen. Berechnungswege aufzeigen, u.a. Wallissches Produkt. Warum ist  $\pi$  irrational?

**C Absolute und unbedingte Konvergenz von Reihen**

Zunächst so wie in der Vorlesung, dann der Beweis zum Satz, dass unbedingte und absolute Konvergenz äquivalent sind. Optional: Summierbarkeit.

**D Gleichmäßige Stetigkeit**

Was ist gleichmäßige Stetigkeit, auch im Vergleich zur Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit und Differenzierbarkeit. Wann ist sie erfüllt, und wo wird sie gebraucht?

**E Integration rationaler Funktionen**

Partialbruchzerlegung (mit Beweisidee) und Diskussion der Integrale (vgl. 21.4.1°–4°), die man dann bei der Integration rationaler Funktionen braucht. Durchführung eines Beispiels.

**F Sehnentrapezregel**

Formulierung und Beweis nach Skript. Beispiel dazu mit Schrittweitenverkleinerung und Vergleich der Approximationen und des tatsächlichen Integralwertes. Optional: Weitere Approximationsformeln (z.B. allgemeine Eulerformel, siehe Königsberger) und z.B. Stirlingsche Formel als Anwendung.

**G Fixpunktansatz zum Newtonverfahren**

Abschätzung des Newtonverfahrens 19.16 und Verallgemeinerungen, wie 19.17 etc.

**H Integration von Regelfunktionen**

Begriff und Aussagen wie in Königsberger.

Viel Spaß!

München, d. 22.2.2007

Martin Schottenloher.