Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 13

20.7. – 24.7.2009

1. Aufgabe: Zeichnen Sie auf einem Blatt Papier ganz frei und spontan eine Kurve γ, die mindestens 10 Überkreuzungen aufweist, und tragen Sie in jede Zusammenhangskomponente Z des Komplements $U = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ die Windungszahl $W_Z := W(\gamma, p)$, $p \in Z$, ein. Ermitteln Sie auf diese Weise $\mathrm{int}(\alpha)$. Versuchen Sie die Konfiguration so einzurichten, dass 4 der beschränkten Komponenten jeweils die Windungszahl 0 zugeordent ist.

2. Aufgabe: Wie viele Komponenten hat $U = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ in der Regel, wenn γ sich n-mal überkreuzt? Warum gilt das nicht immer?

3. Aufgabe: Sei U eine nichtleere offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $S \subset U$ eine Teilmenge von U ohne Häufungspunkt in U. Für welche Funktionen $f \in \mathcal{O}(U\backslash S)$ gilt

$$\mathrm{Res}_p \frac{f'}{f} = \mathrm{ord}_p f \, , \; p \in U \, ?$$

4. Aufgabe: Man verifiziere für Funktionen f, g, die in einer Umgebung von $\partial D(p, r)$ holomorph sind und die $|f(\zeta) - g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ für alle $\zeta \in \partial D(p, r)$ erfüllen, die folgende Aussage (Nachtrag zum Beweis des Satzes von Rouché): $h_s := f + s(g - f)$ hat für jedes $s \in [0, 1]$ in keinem Punkt $\zeta \in \partial D(p, r)$ eine Nullstelle.

5. Aufgabe: Man beweise den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché.

6. Aufgabe: Wie viele Nullstellen hat $z^9 - 4z^5 - 2z + 1$ in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$?

7. Aufgabe: Man zeige, dass jede (stetige) geschlossene Kurve α in $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ homotop zu einer Kurve γ auf dem Rand $\partial D(p, r)$ für einen geeigneten Radius ist. γ kann sogar als

$$\gamma(t) = p + r \exp(i(kt + \theta)) \, , \; t \in [0, 2\pi] \; , \qquad (*)$$

   mit geeigneten k , θ gewählt werden. Vorschlag: Man stelle erst einmal fest, dass α zu einem Polygonzug homotop ist.

   Man bestätige mit diesem Resultat, dass die Windungszahl $W(\alpha, p)$ stets ganzzahlig ist (auch für nicht notwendig stückweise stetig differenzierbare Kurven).

   Welche Bedeutung hat die Konstante k in $(*)$?