MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 12

13.7. – 17.7.2009

1. Aufgabe: Man zeige, dass für eine meromorphe Funktion $f \neq 0$ auf einem Gebiet G für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ die Menge
$$\{z \in K : \mathrm{ord}_z \neq 0\}$$
endlich ist.

2. Aufgabe: Bestimme $\mathrm{ord}_p f$ für
$$f(z) := \frac{z^2}{\sin z} \exp \frac{1}{z-1}$$
für alle $p \in \mathbb{C}$.

3. Aufgabe: Man zerlege die folgenden offenen Teilmengen der komplexen Ebene in ihre Zusammenhamngskomponenten
   - $D(-1,1) \cup D(1,1) \cup D(2,1)$,
   - $\bigcup_{n\geq 1} D(i^n, \frac{1}{n})$,
   - $\bigcup_{n\geq n} D(2^{-1}, \frac{1}{n})$,
   - $\bigcup_{n\geq n} D(\frac{1}{n}, 2^{-n})$,

4. Aufgabe: Man zerlege die folgenden Urbilder offener Mengen in ihre Zusammenhangskomponenten für $f(z) := e^z$, $z \in \mathbb{C}$ und $g(z) := \mathrm{Log}(\frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}^{**}$.
   - $f^{-1}(D(0,1))$,
   - $f^{-1}(D(1,1))$,
   - $f^{-1}(D(0,1)) \cap \mathbb{C}^{**})$,
   - $g^{-1}(D(0,1))$,
   - $g^{-1}(D(1,1))$,
   - $g^{-1}(D(0,1) \cap \mathbb{C}^{**})$,

5. Aufgabe: Um zu zeigen, dass die Windungszahl $W(\alpha, z)$, $z \in \mathbb{C}\backslash\alpha^*$, einer geschlossenen Kurve α eine ganze Zahl ist, beweise man für
$$\varphi(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{\dot\alpha(s)}{\alpha(s) - z} ds \,,\; t \in [0,1] \;,$$
dass $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$ gilt, indem man für $\psi(t) := (\alpha(t) - z)\exp(-2\pi i\varphi(t))$ die Identität
$$\dot\psi = 0$$
bestätige, und damit $\psi(0) = \psi(1)$. Aus dieser Gleichheit folgt $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$.