

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 11

3.7. – 10.7.2009

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die Laurententwicklung von $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

- in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, und
- in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

2. Aufgabe: Man bestimme die Residuen in alle Singularitäten der folgenden Funktionen

- $f(z) = \frac{1 - \cos \pi z}{z^2}$,
- $g(z) = \frac{1 - \cos \pi z}{z^3}$,
- $h(z) = z \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$,
- $s(z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}$.

3. Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie: Für eine holomorphe Funktion f auf $A_{0,r}(p)$ gilt stets:

$$\operatorname{Res}_p f' = 0.$$

4. Aufgabe: Zeigen Sie: Für eine in $A_{0,r}(p)$ holomorphe Funktion f ist das Residuum in p die eindeutig bestimmte Zahl c , für die

$$f - \frac{c}{z-p}$$

eine Stammfunktion in einer Umgebung von p hat.

5. Aufgabe: Man zeige, dass für eine meromorphe Funktion f mit einem Pol der Ordnung 1 in p und eine in einer Umgebung von p holomorphen Funktion g die Formel

$$\operatorname{Res}_p(gf) = g(p)\operatorname{Res}_p f$$

gilt. Wie sieht eine entsprechende Formel im Falle einer Ordnung 2 (oder $k \geq 2$) aus?