Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 9

22.6. – 26.6.2009

1. Aufgabe: Man untersuche die folgenden Produkte auf absolute Konvergenz:
   - $\prod \frac{1}{n}$,
   - $\prod \frac{n+1}{n}$,
   - $\prod \frac{n}{n+1}$,
   - $\prod \frac{n}{(n+1)^2}$,
   - $\prod (1 + n^{-z})$, $z \in \mathbb{C}$.
2. Aufgabe: Man zeige, dass (p_n) auf ganz $\mathbb{C}$ kompakt konvergiert, wobei
$$p_n(z) := \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) , \; z \in \mathbb{C} .$$
3. Aufgabe: Man bestimme in dem Körper der formalen Laurentreihen die multiplikative Inverse von
   - T^2,
   - $T + T^2$.
4. Aufgabe: Man zeige für die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{O}(U)$: Die Addition
$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U) \, , \; (f, g) \mapsto f + g \, ,$$
und die Skalarmultiplikation
$$\mathbb{C} \times \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U) \, , \; (\lambda, f) \mapsto \lambda f \, ,$$
sind stetige Abbildungen. $\mathcal{O}(U)$ ist also ein *topologischer Vektorraum.*
5. Aufgabe: Man beweise: Auch die Multiplikation
$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U) \, , \; (f, g) \mapsto fg \, ,$$
und die Inversenbildung
$$\mathcal{O}^*(U) \mapsto \mathcal{O}^*(U) \, , \; g \mapsto g^{-1} \, ,$$
sind stetige Abbildungen. Ist $\mathcal{O}^*(U)$ offen in $\mathcal{O}(U)$?