Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 8

15.6. – 19.6.2009

1. Aufgabe: Welche Voraussetzungen fehlen bei der folgenden Aussage

   "fg holomorph auf U und g holomorph auf $U \quad \Longrightarrow \quad f$ holomorph",

   um sie zu einer richtigen Aussage zu machen? Natürlich sollen die Voraussetzungen minimal gewählt werden.

2. Aufgabe: Man bestimme in dem Ring $\mathbb{C}\langle T\rangle$ der konvergenten Potenzreihen die multiplikative Inverse von $2+T^2$.

3. Aufgabe: Man beweise oder widerlege für total (reell) differenzierbare f, g:

$$\overline{\partial}(fg) = \overline{\partial} f\, g + f\, \overline{\partial} g\,.$$

4. Aufgabe: Kann die Funktion tan in einige der Nullstellen von cos hinein holomorph fortgesetzt werden? Wie lautet die Antwort auf dieselbe Frage bezüglich $z \mapsto (z+\frac{\pi}{2})\tan z$?

5. Aufgabe: f und g seien holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$, und es gelte $f(z)g(z) = 0$ für unendlich viele paarweise verschiedene $z \in G$. Man beweise oder widerlege: f oder g ist dann die Nullfunktion.

6. Aufgabe: Sei U offen, seien $p, q \in U$ zwei ausgezeichnete Punkte in U, und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine reelle Gerade. Die Funktion f sei stetig in U und sie sei holomorph auf U abgesehen von den Punkten aus $L \cup \{p, q\}$. Man beweise oder widerlege: f ist holomorph auf U.

7. Aufgabe: Man bestimme das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{\sin \pi\zeta}{\zeta^2(\zeta^2+1)} d\zeta$$

   längs der Kurven $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

8. Sei $u : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$. Man zeige, dass u das Maximumprinzip im folgenden Sinne erfüllt: Hat u in $\mathbb{E}$ ein lokales Maximum, so ist u konstant.