

Prof. Dr. M. Schottenloher  
C. Paleani  
M. Schwingenheuer  
A. Stadelmaier

## Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 7

8.6. – 12.6.2009

1. Aufgabe: Man bestimme  $\int_{\beta} \frac{\sin z}{z-i} dz$  für den Weg  $\beta(t) := 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
2. Aufgabe: Man versuche die Funktionen  $f(z) = \frac{z}{\sin z}$  und  $g(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$  in den Nullpunkt hinein holomorph fortzusetzen.
3. Aufgabe: Man zeige mit dem Satz von Liouville die vermeintlich stärkere Aussage: Jede ganze Funktion mit beschränktem Realteil ist konstant.
4. Aufgabe: Zeige für ganze Funktionen  $g, f$  mit  $|f(z)| \leq |g(z)|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , dass  $f = \lambda g$  gilt für ein geeignetes  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Hinweis: Riemannscher Hebbarkeitssatz auf  $\frac{f}{g}$  anwenden.
5. Aufgabe: Bestimme das Maximum auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $\overline{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  der Absolutbeträge von folgenden Funktionen:
  - (a)  $f(z) = z^2 + z - 1$
  - (b)  $g(z) = 1 - z\bar{z}$
  - (c)  $h(z) = \exp z^2$

Warum ist das Resultat für  $g$  kein Widerspruch zum Maximumprinzip?