Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 6

2.6. – 5.6.2009

1. Aufgabe: Man bestimme $\int_\beta \frac{1}{\zeta} d\zeta$ für den Weg $\beta(t) := re^{it}$, $t \in [a,b]$.

2. Aufgabe: Sei α_z für $z = re^{i\psi} \in \mathbb{C}^{**}$, $r > 0$, $\psi \in \,]-\pi,\pi[$, die Kurve von 1 nach z, die von 1 nach r auf der x-Achse verläuft und die dann mit dem Kreisbogen $re^{it\psi}$, $t \in [0,1]$, übereinstimmt, der r und z verbindet.

   (a) Man bestimme direkt (das soll hier heißen: unter direkter Verwendung der Definition das Wegintegrals)
   $$F(z) := \int_{\alpha_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta .$$

   (b) Man bestätige, dass der Hauptzweig Log_0 des Logarithmus mit F auf $\mathbb{C}^{**}$ übereinstimmt.

   (c) Man zeige $F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$ auch für jeden anderen (stückweise stetig differenzierbaren) Weg γ_z, der in $\mathbb{C}^{**}$ den Punkt 1 mit z verbindet.

3. Auf dem Rand der Kreisscheibe $D(z_0,r)$ verläuft die Kurve $\gamma_m := z_0 + re^{2\pi imt}$, $t \in [0,1]$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Man zeige für jeden Punkt $z \in D(z_0,r)$:
   $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = m .$$
   Das ist mehr als der in der Vorlesung (§ 9) gezeigte Fall mit $z = z_0$ und $z_0 = 0$ (siehe auch die Verallgemeinerung in der Aufgabe 1), und folgt direkt aus der Integralformel, kann aber auch aus der Holomorphie von $z \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ gefolgert werden.