Mathematisches Institut
Universität München

SS 2009

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 5

25.5. – 29.5.2009

1. Aufgabe: Man skizziere die folgenden Kurven
   - $\gamma(t) = \quad t + i\sin t\,,\ t \in [0, 2\pi]$.
   - $\gamma(t) = \sin t + i\,t \quad ,\ t \in [0, 2\pi]$.
   - $\gamma(t) = \sin t + i\sin t\,,\ t \in [0, 2\pi]$.
   - $\gamma(s) = \exp e^{is} \quad ,\ s \in [0, 2\pi]$.
   - $\gamma(s) = \exp e^{i\frac{s}{2}} \quad ,\ s \in [0, 2\pi]$.
   - $\gamma(s) = \exp ie^{i\frac{s}{2}}\,,\ s \in [0, 2\pi]$.
2. Aufgabe: R sei das Quadrat, dass durch die Punkte $\{1, i, -1, -i\}$ definiert wird. Man gebe eine explizite Darstellung α des positiv orientierten Randes von R an und berechne das Wegintegral
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dz}{z}\,.$$
3. Man berechne $\int_\gamma \cos z\,dz$ längs des Parabelstücks γ der Parabel $y = x^2$ von 0 nach $1 + i$.
4. Berechne $\int_\gamma z\exp z^2 dz$ für die Wege
   - γ die Verbindungsstrecke zwischen 0 und $1 + i$.
   - γ das Parabelstück auf $y = x^2$ zwischen 0 und $1 + i$.
   - γ die *Figur Acht*: $\gamma(t) = +1 - e^{it}\,,\ t \in [0, 2\pi]$ und $\gamma(t) = -1 - e^{-it}\,,\ t \in [2\pi, 4\pi]$.
5. Aufgabe: Man beweise die Transformationsinvarianz des komplexen Wegintegrals $\int_\gamma f dz$. Also: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Für stetig differenzierbare $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ und $\alpha = \gamma \circ \varphi^{-1} : [c, d] \to U$ ist zu zeigen:
$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha f dz\,.$$