Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 4

18.5. – 22.5.2009

1. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Exponentialfunktion.
   - Man bestimme das Bild des Rechtecks $R := [-r, r] \times [-\alpha, \alpha]$ unter f
   - Man skizziere den Verlauf der Bilder der reellen Geradenstücke $\operatorname{Re} z = s$, $\operatorname{Im} z = \phi$ in R für $(s, \phi) \in R$.

2. Aufgabe: Man zerlege die folgenden Funktionen f in Real- und Imaginärteil $f = u + iv$ durch explizite Angabe der Funktionen u, v.
   - $f(z) = \sin z$.
   - $f(z) = |z|$.
   - $f(z) = z^3 + iz$.
   - $f(z) = \exp z^2$.

3. Aufgabe: Die folgenden Identitäten für eine reell differenzierbare Funktion $f = u + iv$ leite man direkt aus der Definition von ∂f und $\overline{\partial} f$ her:
$$2\,\partial f = (u_x + u_y) + i(v_x - u_y) \ \text{ und } \ 2\,\overline{\partial} f = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y).$$

4. Aufgabe: Man prüfe die folgenden Identitäten für eine holomorphe Funktion $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$.
   - $f' = f_x$.
   - $f' = i f_y$.
   - $f' = \partial f$.
   - $\det Df = f' \overline{f'}$, wobei wie in der Vorlesung $Df(z)$ die reelle Ableitung (Jacobi-Matrix) bezeichnet.

5. Aufgabe: Aus dem Satz über die Umkehrfunktion der reellen Analysis leite man her: Für eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, deren Ableitung f' stetig ist, gibt es zu jedem Punkt $z \in \Omega$ mit $f'(z) \neq 0$ eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z und eine offene Umgebung V von $f(z)$, so dass $f|_U$ eine reell differenzierbare Umkehrabbildung $g : V \to U \subset \mathbb{C}$ hat. Man folgere: g ist außerdem holomorph.

   Bemerkung: Wir werden später sehen, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion immer stetig ist.

6. Aufgabe: Man beweise oder widerlege: Jede holomorphe Funktion $f : \Omega \in \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $f(\Omega) \subset \{x + iy \in \mathbb{C} : xy = 0 \ \text{ oder } \ x + y = 0\}$ ist bereits konstant.

7. Aufgabe: Man zeige, dass die Funktionenfolge (f_n), $f_n(z) := (1+\frac{z}{n})^n$, $z \in \mathbb{C}$, lokal gleichmäßig gegen $\exp z$ konvergiert. Wie steht es mit der kompakten Konvergenz? Kann man auch von normaler Konvergenz sprechen?