Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Präsenzübungen zur Funktionentheorie - Blatt 2

4.5. – 8.5.2009

1. Aufgabe: Man untersuche, ob die folgenden Potenzreihen mit Konvergenzradius 1 in $z = -1$ konvergieren:
   - $\sum z^n$
   - $\sum \frac{1}{n} z^n$
   - $\sum (-1)^n \frac{1}{n+1} z^n$
   - $\sum (\frac{1}{n})^2 z^n$
   - $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$

2. Aufgabe: Man erinnere sich an die Potenzreihenentwicklung des reellen Logarithmus
   $$\log :]0,\infty[\to \mathbb{R} \, : \, \log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n \, .$$
   Kann man einfach komplexe z in die Reihe einsetzen und erhält damit eine holomorphe oder gar analytische Funktion? Welche z?

3. Aufgabe: Wie sieht der analoge Ansatz aus der vorigen Aufgabe für die anderen Entwicklungspunkte aus, also für $t_0 > 0$ anstelle von 1? Erhält man so eine analytische Funktion auf der ganzen rechten Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \, : \, \mathrm{Re} z > 0\}$?

4. Aufgabe: Wenn wir die Funktion aus der vorigen Aufgabe $\log : H \to \mathbb{C}$ nennen, wie kann man
   $$e^{\log z} = z$$
   beweisen (ohne den Identitätssatz zu verwenden)?

5. Mit dem Potenzreihenansatz(*) löse man das Anfangswertproblem $f' = f + 1$, $f(0) = 0$. (*) *Potenzreihenansatz* heißt hier: Unter der Annahme, dass es eine analytische Lösung gibt, setze man eine konvergente Potenzreihe als Lösung an und bestimme eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_n.

6. Aufgabe: Es sei an $\binom{s}{n}$ für komplexe s erinnert: $\binom{s}{0} = 1$, $\binom{s}{n} = \frac{s}{n}\binom{s-1}{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Sei $b_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Summe konvergiert.
   - Welcher Ausdruck ergibt sich für $s \in \mathbb{N}$?
   - Der Konvergenzradius von b_s ist für alle $s \in \mathbb{C}$ mindestens 1. Hinweis: Verwende $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$.
   - Die dadurch gegebene holomorphe Funktion erfüllt $b_s' = s b_{s-1}$ und $b_s(0) = 1$.