Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 1:

Finden Sie ein Beispiel für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, die auf den Kreisringen $A_{0,1}(0)$ und $A_{1,2}(0)$ unterschiedliche Laurentreihenentwicklungen besitzt. Beweisen Sie, dass Ihr Beispiel die geforderte Bedingung erfüllt.

Lösung:

Wir betrachten die Funktion:

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{1-z}.$$

Die Laurentreihenentwicklung auf $A_{0,1}(0)$ lautet:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für } |z| < 1.$$

Es gilt:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Damit gilt für die Laurentreihenentwicklung auf $A_{1,2}(0)$:

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{für } |z| > 1.$$

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 2:

Sei U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, $G \subset U$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \subset U$ und $p \in G$ ein Punkt. Sei weiter $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft: $|f(p)| < \min\{|f(z)| \,|\, z \in \partial G\}$. Zeigen Sie: f besitzt eine Nullstelle in G.

Lösung:

Angenommen f besitzt keine Nullstelle in G. Es gilt also $|f(z)| > 0$ für alle $z \in G$ und $f(z) \neq 0$ auf ∂G nach Voraussetzung. Betrachte nun die Funktion:

$$g : \overline{G} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{f(z)}.$$

Nach Vorraussetzung gilt:

$$|f(p)| < \min\{|f(z)| \,|\, z \in \partial G\} \quad \text{für } p \in G.$$

Dies bedeutet aber:

$$|g(p)| > \max\{|g(z)| \,|\, z \in \partial G\} \quad \text{für } p \in G. \tag{1}$$

Beachte nun, daß f nicht konstant ist, da

$$|f(p)| < \min\{|f(z)| \,|\, z \in \partial G\}$$

gilt. Damit ist auch g nicht konstant. Nach dem Maximumprinzip wird das Maximum von g aber auf dem Rand angenommen. Dies ist ein Widerspruch zu Ungleichung (1) und die Behauptung ist damit gezeigt.

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie SS 2009

Aufgabe 3:

(a) Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Residuum der Funktionen f_k an der Stelle 0 :

$$f_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{\sin z}{z^k} .$$

(b) Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklungen der Funktion g für geeignete punktierte Kreisscheiben um ihre Singularitäten 0 *und* 1:

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2}.$$

Lösung :

(a) Zuerst notieren wir die Reihenentwicklung des komplexen Sinus:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Damit:

$$\frac{\sin(z)}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1-k}$$

Sei $k \leq 0$. Dann gilt:

$$\mathrm{Res}_0(f_k) = 0$$

da $2n + 1 - k \geq 0$ gilt.

Sei nun $m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $k = 2m + 1$. Dann gilt:

$$\mathrm{Res}_0(f_k) = 0$$

denn die Gleichung

$$2n + 1 - (2m + 1) = -1$$

kann für kein m erfüllt werden.

Sei nun $m > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $k = 2m$. Dann gilt:

$$\mathrm{Res}_0(f_k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1}}{(k-1)!}$$

denn die Gleichung

$$2n + 1 - (2m) = -1$$

liefert $n = m - 1$ als einzige Lösung.

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Lösung :

(b) Sei zuerst $|z| > 0$ und $|z| < 1$. Schreibe:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Die Singularität an der Stelle 0 ist also hebbar. Es gilt:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

damit also auf $D(0,1)$:

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) z^n$$

Sei jetzt $|z-1| > 0$. Schreibe:

$$z^2 = (z-1)^2 + 2(Z-1) + 1$$

Damit gilt auf $A_{0,\infty}(1)$:

$$g(z) = 1 + \frac{2}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie SS 2009

Aufgabe 4:

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes den Wert a des folgenden uneigentlichen Integrals:

$$a := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Sie dürfen natürlich Methoden der Vorlesung bzw. der Übungen benutzen!

Lösung :

Für dieses Integral verwenden wir den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz (21.7). *Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome in einer Veränderlichen, wobei $Q^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $\operatorname{grad} Q \geq 2 + \operatorname{grad} P$ gelte. Sei*

$$f(x) := \frac{P}{Q}$$

meromorphe Funktion. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_z(f)$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt und wir können die Pole des Integranden bestimmen. Sei:

$$f(z) := \frac{4}{z^2 - z + 1}$$

Es gilt:

$$z^2 - z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$$

mit $z_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $z_2 = \overline{z_1}$. Es ist $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ und wir haben:

$$\operatorname{Res}_{z_1}(f) = \frac{4}{z_1 - z_2} = -\mathrm{i}\,\frac{4}{2\operatorname{Im}(z_1)} = -\mathrm{i}\,\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Damit ist also der Wert:

$$a = 2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{i}\,\frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$$

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 5:

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und p ein Punkt in G. Weiter sei $\mathcal{K}$ definiert als die Menge holomorpher Funktionen auf G mit Bild in der offenen Scheibe $D(0,R)$ vom Radius $R>0$, die in p verschwinden, also:

$$\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{O}(G) \mid |f(z)| < R \; \forall z \in G,\; f(p) = 0\}.$$

Zeigen Sie die Kompaktheit der Menge $\mathcal{K}$ bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz in $\mathcal{O}(G)$.

Lösung :

Zuerst bemerken wir, daß $\mathcal{K}$ beschränkt ist nach Definition.

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist. Sei (f_n) kompakt konvergente Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Nach dem Satz von Weierstrass ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Da (f_n) auch punktweise konvergiert ist $|f(z)| \leq R$ für alle $z \in G$ und $f(p) = 0$.

Ist nun f konstant so gilt $|f(z)| < R$. Ist andererseits f nicht konstant, so ist nach dem Satz von der Gebietstreue $f(G)$ offen in $\mathbb{C}$, also auch $|f(z)| < R$.

Damit ist $f \in \mathcal{K}$, also $\mathcal{K}$ abgeschlossen.

Insgesamt ist $\mathcal{K}$ beschränkt und abgeschlossen. Nach dem Satz von Montel ist $\mathcal{K}$ kompakt.

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 6:

Beschreiben Sie die Menge M aller Werte, die das folgende Integral bei Wahl einer geschlossenen, stetig differenzierbaren Kurve $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ annehmen kann:

$$I(\alpha) := \int_\alpha \frac{1}{1+\zeta^2}\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

Das heißt $M := \{I(\alpha) \,|\, \alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, \alpha\,\text{stetig differenzierbar}, \alpha(0) = \alpha(1)\}$

Lösung :

Es gilt:

$$1 + z^2 = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$$

Der Integrand hat zwei Pole, einen bei $-\mathrm{i}$ und einen bei i. Sei im Folgenden $W(\alpha, z)$ die Windungszahl. Es gilt:

$$I(\alpha) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\right)W(\alpha,\mathrm{i}) + 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\right)W(\alpha,-\mathrm{i})$$

Es ist

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}$$

und

$$\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}$$

Damit ergibt sich:

$$I(\alpha) = W(\alpha,\mathrm{i})\pi - W(\alpha,-\mathrm{i})\pi$$

Damit gilt für die Menge M:

$$M = \pi\mathbb{Z}$$

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 7:

(a) Formulieren Sie jeweils mit allen notwendigen Voraussetzungen den Cauchy-Integralsatz in der Homologieversion, sowie den Residuensatz ebenfalls in der Homologieversion.

(b) Zeigen Sie für die Sätze aus Teilaufgabe (a):

Der Cauchy-Integralsatz folgt aus dem Residuensatz.

Lösung:

(a) Cauchy - Integralsatz:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei f eine holomorphe Funktion auf U. Weiter sei α eine stetige geschlossene nullhomologe Kurve in U. Dann gilt:

$$\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Residuensatz:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $S \subset U$ eine in U diskrete Menge. Sei f eine holomorphe Funktion auf $U \setminus S$. Weiter sei α eine stetige geschlossene nullhomologe Kurve in $U \setminus S$. Dann gilt:

$$\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in S} \mathrm{Res}_s(f) W(\alpha, s)$$

(b) Seien die Vorraussetzungen des Residuensatz gegeben. Weiter sei $S = \emptyset$. Damit erhält man die Voraussetzungen des Cauchy - Integralsatz und auch die Aussage.

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 8:

(a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.

(b) Bestimmen Sie mit diesem Satz die Gesamtzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten gerechnet) der holomorphen Funktion :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto (z^6 - 4z^2 - 2z + 8) \sin z$$

in den folgenden offenen Kreisscheiben :

(i) D(0,1),

(ii) D(0,2).

Lösung :

(a) Sei G ein Gebiet, $p \in G$ und $\overline{D(p,R)} \subset G$. Seien f, g meromorphe Funktionen auf G ohne Null- und Polstellen auf $\partial D(p,R)$. Es gelte die Ungleichung:

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |f(\zeta)| \quad \text{für alle } \zeta \in \partial D(p,R)$$

Dann gilt:

$$\#N(f) - \#P(f) = \#N(g) - \#P(g)$$

(b) Die Funktion f hat auf $D(0,2)$ höchstens Nullstellen. Auf $D(0,2)$ hat $\sin(z)$ eine Nullstelle bei $z = 0$, also auch auf $D(0,1)$. Betrachte im Folgenden nur noch das Polynom.

Für $z \in \partial D(0,1)$ gilt:

$$|-4z^2 - 2z| \leq 6 < 7 \leq |z^6 + 8|$$

Das Polynom $z^6 + 8$ hat keine Nullstellen in $D(0,1)$, da für eine Nullstelle z_0 gelten muß: $|z_0| = \sqrt{2} > 1$.

Für $z \in \partial D(0,2)$ gilt:

$$|-4z^2 - 2z| \leq 20 < 56 \leq |z^6 + 8|$$

Das Polynom $z^6 + 8$ hat 6 Nullstellen in $D(0,2)$, da $\sqrt{2} < 2$.

Die Gesamtzahl der Nullstellen von f in $D(0,1)$ ist also 1 und in $D(0,2)$ ist sie 7.

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 9:

Zeigen Sie: Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{**}$ ist konstant.

Lösung :

Das Gebiet C^{**} ist ein Sterngebiet, also Elementargebiet. Nach dem kleinen Riemannschen Abbildungssatz ist also C^{**} konform äquivalent zu $\mathbb{E}$ vermöge einer Abbildung ϕ. Betrachte nun die Abbildung $\phi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$. Diese Abbildung ist beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant. Das heißt aber, daß f schon konstant sein muß.

Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher

28. Juli 2009

2. Klausur zur Funktionentheorie
SS 2009

Aufgabe 10:

Entscheiden Sie über den Wahrheitsgehalt der nachstehenden Aussagen (i)-(vi), d.h. notieren Sie als Lösung „**wahr**", falls die Aussage wahr ist und „**falsch**", falls die Aussage falsch ist.
Eine Begründung ist nicht erforderlich!

Bitte beachten Sie, dass Sie einen Punkt auf eine korrekte Antwort erhalten, Ihnen jedoch für eine *nicht* korrekte Antwort ein Punkt abgezogen wird. Für keine Antwort erhalten Sie keinen Punkt. Die Mindestpunktzahl in dieser Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Sei $A := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 2\}$ der abgeschlossene Kreisring mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2.

(i) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus A$ ist konstant.

(ii) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist konstant.

(iii) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{**} \to A$ ist konstant.

(iv) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{**} \to \partial A$ ist konstant.

(v) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus A$ ist konstant.

(vi) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist konstant.

Lösung :

(i) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus A$ ist konstant.
wahr

(ii) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist konstant.
falsch

(iii) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{**} \to A$ ist konstant.
falsch

(iv) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^{**} \to \partial A$ ist konstant.
wahr

(v) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus A$ ist konstant.
wahr

(vi) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist konstant.
falsch