Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
A. Stadelmaier
M. Schwingenheuer

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Lösungen zu Übungsblatt 9

1. Sei $\sum f_n$ normal konvergent in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeige, dass

$$p := \prod_{n=n_0}^{\infty} (1 + f_n)$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion definiert. (Hinweis: Zeige $\prod_{n=n_0}^{m}(1 + f_n)$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen p). Man zeige weiterhin:

$$\frac{p'}{p} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f_n'}{1 + f_n} \,,$$

wenn p nicht die Nullfunktion ist. In $\{z \in G | p(z) \neq 0\}$ ist die Konvergenz normal.

Lösung: Es gilt $|\log(1 + z)| \leq 2|z|$. Sei $K \subset G$ kompakt. Dann ist

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sup_{z \in K} |\log(1 + f_n(z))| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} 2 \sup_{z \in K} |f_n(z)| < \infty$$

da $\sum f_n$ nach Voraussetzung normal konvergiert. Deshalb ist $\sum_n \log(1 + f_n) \in \mathcal{O}(G)$. Daher ist auch

$$p = \exp\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + f_n)\right) \in \mathcal{O}(U) \,.$$

Weiterhin gilt mit dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz

$$\frac{p'}{p} = \frac{d}{dz} \log p = \frac{d}{dz} \sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + f_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f_n'}{1 + f_n} \,. \tag{1}$$

Nun zeigen wir die normale Konvergenz. Gehen wir davon aus, dass $f_n : V \to \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in V$ keine Nullstelle, ansonsten aber beliebig, und $K \subset V$ eine kompakte Menge, welche z_0, jedoch keine Nullstelle von f enthällt. Weiterhin sei $U \subset K$ offen. Dies ist immer möglich, da die Nullstellenmenge einer holomorphen, von 0 verschiedenen Funktion, diskret in $\mathbb{C}$ liegt. Daher ist $1 + f_n \neq 0$ und $(1 + f_n)^{-1}$ als auf K holomorphe und damit insbesondere stetige Funktion auf K und daher auch automatisch auf $U \subset K$ beschränkt. Da das unendliche Produkt normal konvergiert, existiert $\sup_{n\in\mathbb{N}}(1 + f_n)^{-1}$ und es genügt zu untersuchen, ob $\sum f_n'$ normal konvergiert. Dies und damit die Behauptung folgt aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß.

2. Sei $\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} dt$. Die kompakte Konvergenz des Integrals in $\mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re} z > 0\}$ sei vorausgesetzt.

   (a) Zeigen Sie $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$, $\forall z \in \mathbb{H}_0$.

Lösung: Es gilt nach partieller Integration

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z \mathrm{e}^{-t} dt = 0 - \int_0^\infty z t^{z-1}(-1)\mathrm{e}^{-t} dt = z \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t} = z\,\Gamma(z)$$

(b) Zeigen Sie $\Gamma(1) = 1$ und damit $\Gamma(n+1) = n!$.

Lösung: Einfaches einsetzen führt zum Ziel

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty 1^z \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} dt = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

Damit folgt

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\ldots 1\Gamma(1) = n!$$

(c) Beweisen Sie, dass

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

und dass dies eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ liefert.

Lösung: Wir zeigen zunächst die angegebene Beziehung. Es gilt

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)\Gamma(z+n) = (z+n)(z+n-1)\Gamma(z+n-1) = \ldots = (z+n)(z+n-1)\cdots z\Gamma(z)$$

und damit

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\ .$$

Nun hat die rechte Seite einen größeren Definitionsbereich als die linke Seite und ist außerhalb von $z \in \{0, -1, -2, \ldots, -n\}$ holomorph. So lässt sich sukzessive eine analytische Fortsetzung von Γ auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ konstruieren.

(d) Zeigen Sie

$$\lim_{z\to -n} (z+n)\,\Gamma(z) = (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Lösung: Verwendung des Ergebnisses aus der vorherigen Aufgabe liefert

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+(n-1))} = (-1)^n\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

3. Sei $T_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\, z \in]1-\epsilon, 2[\}$ und sei $f : T_\epsilon \to \mathbb{C}$ holomorph mit

   (i) $\|f\|_{T_\epsilon} < \infty$

   (ii) $f(z+1) = z\,f(z)\ \forall z \in T_\epsilon$, mit $z+1 \in T_\epsilon$

   Zeigen Sie nun, dass f eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ hat und $f = f(1)\,\Gamma$.

Lösung: Der Beweis der Existenz einer analytischen Fortsetzung der Γ Funktion in der letzten Aufgabe verwendetet nur die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ und ist daher auch hier anwendbar. Daher existiert eine analytische Fortsetzung von f auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ und es gilt

$$\lim_{z\to -n}(z+n)f(z) = f(1)\frac{(-1)^n}{n!}\ .$$

Definieren wir uns nun eine Funktion $h(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z)$. Diese ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ und es gilt $h(1) = 0$, sowie

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -n}(z+n)h(z) &= \lim_{z\to -n}(z+n)f(z) - f(1)\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}f(1) - \frac{(-1)^n}{n!}f(1) = 0\end{aligned}$$

Daher ist h auf $U_\epsilon(-n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ beschränkt und lässt sich deshalb nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph fortsetzen. Also ist h eine ganze Funktion. Da $\|f\|_{T_\epsilon} < \infty$ und $\|\Gamma\|_{T_\epsilon} < \infty$ folgt $\|h\|_{T_\epsilon} < \infty$. Dies reicht noch nicht, um den Satz von Lioville anzuwenden. Definieren wir uns nun eine Funktion $H(z) := h(z)h(1-z)$ so folgt unter Ausnutzung der Funktionalgleichungen für f und Γ, dass $H(z+1) = -H(z)$ und damit $|H(z+1)| = |H(z)|$. Als nächstes zeigen wir, dass $h(z)$ auf dem Streifen $0 \le \mathrm{Re} z \le 1$ beschränkt ist. Wegen $\|h\|_{T_\epsilon} < \infty$ folgt mit $h(z+1) = z\,h(z+1)$, dass h auf $0 \le \mathrm{Re} z \le 1-\epsilon$ und $z \ne 0$ beschränkt ist. Da $\lim_{z\to -n}(z+n)h(z) = 0$ (das Residuum der Funktion an der Stelle 0) ist h aber auch in 0 und damit zusammen mit $\|h\|_{T_\epsilon} < \infty$ auf dem Vertikalstreifen $0 \le \mathrm{Re} z \le 1$ beschränkt. Daher gilt:

$$\|H\|_{0\le \mathrm{Re} z\le 1} \le \sup_{0\le \mathrm{Re} z\le 1}|h(z)| \cdot \sup_{0\le \mathrm{Re} z\le 1}|h(1-z)| < \infty$$

Wegen $|H(z+1)| = |H(z)|$ ist $\|H\|_{\mathbb{C}} < \infty$ und damit H konstant. Wegen $h(1) = 0$ folgt H identisch 0, also h identisch 0 und damit $f = f(1)\,\Gamma$.

4. (a) Zeigen Sie, dass

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$$

eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion definiert (Hinweis: Zeigen Sie die normale Konvergenz von $\sum\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}-1\right)$).

Lösung: Sei $k \subset \mathbb{C}$ kompakt. Für $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$(1+w)\mathrm{e}^{-w} = (1+w)\left(1 - w + \frac{(-w)^2}{2} + \dots\right) = 1 - \frac{w^2}{2} + \dots$$

wobei wir Terme höherer Ordung vernachlässigt haben und bemerken, dass die Summe über ... eine komplexe Zahl liefert. Daher existiert eine Konstante C_K, sodass

$$\left\|\left(1+\frac{z}{n}\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}-1\right)\right\|_K \le C_K\left\|\left(\frac{z}{n}\right)^2\right\|_K$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(1+\frac{z}{n}\right)-1\right\|_K \le \sum_{n=0}^{\infty}C_K\|z^2\|_K\frac{1}{n^2} = C_K\|z^2\|\frac{\pi^2}{6} < \infty\,.$$

Daher ist die Reihe normal konvergent und liefert nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß eine holomorphe Funktion.

(b) Zeigen Sie, dass

$$z\mathrm{e}^{\gamma z}h(z) = \lim_{n\to\infty} z\,n^{-z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)\,, \quad \text{wobei} \quad \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

und

$$z\mathrm{e}^{\gamma z}h(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-z}}{n!}z(z+1)\cdots(z+n) \tag{2}$$

Lösung: Es ist

$$
\begin{aligned}
G_n :&= z\,\mathrm{e}^{-z\log n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) = z\,\mathrm{e}^{-z\log n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\,\mathrm{e}^{\frac{z}{k}} = \\
&= z\,\mathrm{e}^{zH_n - z\log n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\,,
\end{aligned}
$$

wobei $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ die n-te harmonische Zahl bezeichnet. Daher gilt

$$
G(z) := \lim_{n\to\infty} G_n(z) = z\,\mathrm{e}^{z\gamma}h(z)\,.
$$

Weiterhin ist aber

$$
G_n = \frac{n^{-z}}{n!}\,n!\,z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) = \frac{n^{-z}}{n!}\,z\prod_{k=1}^{n}k\left(1+\frac{z}{k}\right) = \frac{n^{-z}}{n!}\,z\prod_{k=1}^{n}(k+z)\;.
$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern zusammen das Ergebnis.

(c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(z) = (z\mathrm{e}^{\gamma z}h(z))^{-1}$ und verwenden Sie dies, um eine Produktdarstellung von $\Gamma(z)$ zu erhalten.

Lösung: Um diese Aussage zu beweisen, werden wir zeigen, dass $1/G$ die charakteristischen Eigenschaften der Γ Funktion erfüllt.

i. *Beschränktheit auf T_ϵ*: Wir haben oben gezeigt, dass

$$
G(z) = z\,\mathrm{e}^{\gamma z}h(z)
$$

und es ist klar, dass $h(z) = 0 \Leftrightarrow -z \in \mathbb{N}$. Die rechte komplexe Halbebene enthält diese Menge nicht. Nun könnte auf dieser Menge h der 0 beliebig nahe kommen (auf jeder Teilmenge wäre ein Problem). Da aber die zu $h(z)$ gehörende Reihe normal konvergiert (s.o.) und $|\log(1+f_n)| \le 2|f_n|$, für $|f_n|$ klein, ist h auf jedem Kompaktum der rechten komplexen Menge nicht beliebig nahe der 0. Durch einsetzen sieht man, dass $h(x_0+it)$ für $t\to\infty$ nicht der 0 beliebig nahe kommt. Daher ist $1/G(z)$ auf dem Vertikalstreifen T_ϵ beschränkt.

ii. *Funktionalgleichung:* Es gilt

$$
\frac{1}{G(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{z+n+1}\,z\,\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k} = z\frac{1}{G(z)}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{z+n+1} = z\,\frac{1}{G(z)}
$$

iii. *Normierung:* Es ist einfach zu sehen, dass $G_n(1) = 1 + \frac{1}{n}$ und daher $G(1) = 1$.

Insgesamt erhalten wir nach Aufgabe 3: $\Gamma = \frac{1}{G}$. Da wir eine Produktdarstellung von G angegeben haben, ist es klar, dass wir diese auch dazu nutzen können, eine Produktdarstellung von Γ anzugeben. Diese ist durch das Inverse dieser Darstellung gegeben. Die Produktdarstellung von $\frac{1}{\Gamma}$ wird auch Gauß'sche Produktentwicklung genannnt.

5. (a) Beweisen Sie, dass

$$
\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{n}\right)^2\right)
$$

gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion s konvergiert.

Lösung: Wir untersuchen auch hier wieder, ob die dem unendlichen Produkt zugeordnete Reihe normal konvergiert. Sei $K\subset\mathbb{C}$ kompakt. Dann gilt

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{z^2}{n^2}\right\|_K = \|z^2\|_K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\|z\|_K < \infty
$$

Daher konvergiert die Reihe normal und das Produkt definiert demnach eine holomorphe Funktion.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = s(z)$$

(Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Funktion und wenden Sie darauf Liouville an.)

Lösung: Sei

$$f(z) := \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Einfaches einsetzen liefert $f(z+1) = -f(z)$. Wir werden nun zeigen, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Für $z \notin \mathbb{Z}$ ist f offensichtlich beschränkt. Wegen $|f(z+1)| = |f(z)|$ genügt es zu zeigen, dass sich f holomorph nach $z = 0$ fortsetzen lässt. Da f auf einer punktierten Kreisscheibe mit Radius ϵ, also $D(0,\epsilon) \setminus \{0\}$, holomorph ist und

$$\lim_{z\to 0} \left(z\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) - \frac{\pi z}{\sin \pi z} \right) = 1 - 1 = 0\,,$$

ist f auf $D(0,\epsilon) \setminus \{0\}$ beschränkt und lässt sich nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in die 0 und damit nach $\mathbb{Z}$ analytisch fortsetzen und ist in diesen Punkten ebenfalls beschränkt. Deshalb ist f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und als ganze Funktion demnach konstant. Also ist

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

bzw.

$$\frac{1}{z}\,G(z)\,G(1-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

Verwenden wir nun (2), so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} G_n(z)\,G_n(1-z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{n}\frac{1}{n!}\frac{1}{n!} z(1+z)\ldots(n+z)(1-z)(2-z)\ldots(n+1-z) \\
&= \frac{1}{(n!)^2}\frac{z}{z}(n!)^2(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\frac{n+1-z}{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}-\frac{z}{n}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

Da in (a) gezeigt wurde, dass der Grenzwerte des Produkts eine holomorphe Funktion liefert und der Grenzwert des ersten Faktors 1 liefert folgt die Behauptung.

6. Sei U in $\mathbb{C}$ offen und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U, das heißt: $K_n \subset U$ ist kompakt, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ und $\bigcup K_n = U$. Man zeige, dass

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}$$

eine Metrik auf $\mathcal{O}(U)$ ist, welche die Topologie der kompakten Konvergenz induziert.

Lösung: Die Topologie $\mathcal{T}$ eines topologischen Raumes X besteht aus allen Teilmengen $U \subset X$, den offenen Mengen, die folgende Axiome erfüllen:

(i) Die Grundmenge X und die leere Menge $\{\}$ sind aus $\mathcal{T}$.

(ii) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{T}$ ist selbst wieder in $\mathcal{T}$.

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen aus $\mathcal{T}$ ist selbst wieder in $\mathcal{T}$.

Hat man eine Metrik, bzw. Norm, gegeben, definieren diese auf natürliche Weise eine Topologie. Dabei nennen wir eine Menge U offen, wenn sie Umgebung ihrer Punkte ist, d.h. falls es zu jedem $x \in U$ eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x)$ (hier kommt die Metrik/Norm ins Spiel) gibt, mit $U_\epsilon(x) \subset U$.

Zwei Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ über einem gegebenem topologischen Raum sind definitionsgemäß genau dann äquivalent, falls $U \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}_2$, d.h. falls eine Menge U in der einen Topologie genau dann offen ist, falls sie es in der anderen ist. Da eine Menge definitionsgemäß genau dann offen ist, falls ihr Komplement abgeschlossen ist und vice versa, ist es gleichbedeutend zu zeigen, dass eine Menge genau dann in $\mathcal{T}_1$ abgeschlossen ist, falls sie es in $\mathcal{T}_2$ ist. Diesen Weg werden wir verfolgen. Wir werden zeigen, dass eine Folge genau dann in $\mathcal{O}(U)$ kompakt konvergiert, falls sie in der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$ konvergiert.

Beginnen wir mit dem Nachweis, dass es sich bei d um eine Metrik handelt. Aufgrund der Definition von d sind folgende Punkte klar:

(a) $d(f,g) > 0$,
(b) $d(f,g) = d(g,f)$,
(c) $d(f,f) = 0$ und
(d) $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ für alle $f, g \in \mathcal{O}(G)$.

Nun fehlt noch die Dreiecksungleichung. Diese ist auch leicht zu zeigen

(e) Da $x/(1+x)$ eine monoton wachsende Funktion ist, gilt für alle $f, g, h \in \mathcal{O}(G)$

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-h\|_{K_n} + \|h-g\|_{K_n}}{1+\|f-h\|_{K_n} + \|h-g\|_{K_n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-h\|_{K_n}}{1+\|f-h\|_{K_n} + \|h-g\|_{K_n}} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|h-g\|_{K_n}}{1+\|f-h\|_{K_n} + \|h-g\|_{K_n}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|g-h\|_{K_n}}{1+\|g-h\|_{K_n}} = d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

womit die Dreiecksungleichung gezeigt wurde.

Nun müssen wir noch zeigen, dass die Metrik eine wohldefinierte Funktion liefert, d.h. Sie ist eine Abbildung von $\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(G) \to \mathbb{R}$. Da $x/(1+x)$ monoton wächst und im Grenzwert $x \to \infty$ gegen 1 strebt, gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \leq 1$$

und damit

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

also beschränkt.

Sei nun f_m eine gegen f kompakt konvergente Folge in $\mathcal{O}(G)$, d.h.

$$\forall K \subset G : \forall \epsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M : \|f_m - f\|_K < \epsilon \tag{3}$$

Definieren wir $\epsilon_n^m := \|f_m - f\|_{K_n}$ so folgt wegen (3)

$$\lim_{m \to \infty} \epsilon_n^m = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit auch

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f_m - f\|_{K_n}}{1+\|f_m - f\|_{K_n}} = \lim_{m \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon_n^m}{1+\epsilon_n^m} = 0\,.$$

Also

$$d(f_n, f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\epsilon_n^m}{1+\epsilon_n^m} \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon_n^m}{1+\epsilon_n^m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Also konvergiert die Folge f_m auch in $\mathcal{T}_d$.

Sei nun f_m eine gegen f in $\mathcal{T}_d$ konvergente Folge, d.h.

$$\forall \delta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M : d(f_m - f) < \delta \tag{4}$$

und $K \subset G$ beliebige kompakte Menge. Da $\bigcup K_n$ eine kompakte Ausschpfung ist folgt, dass $\exists n_0 \in \mathbb{N} : K \subset \mathring{K}_{n_0}$ und damit $\|f_m - f\|_K \leq \|f_m - f\|_{K_{n_0}}$. Wählen wir nun für beliebiges $\epsilon > 0$

$$\delta = 2^{-n_0} \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} .$$

wegen (4) und der Definition von d gilt dann insbesondere

$$2^{-n_0} \frac{\|f_m - f\|_{K_{n_0}}}{1 + \|f_m - f\|_{K_{n_0}}} < 2^{-n_0} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

und damit $\|f_m - f\|_K \leq \|f_m - f\|_{K_{n_0}} < \epsilon$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset G$. Daher ist f_m kompakt konvergent, wodurch die Äquivalenz der Topologien gezeigt ist.

Disclaimer Diese Lösungen sind als Lösungsskizzen zu verstehen und erheben nicht den Anspruch auf Fehlerfreiheit.