Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie

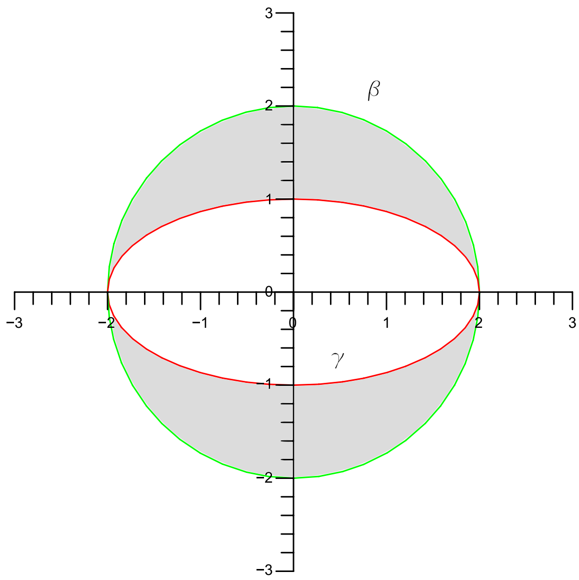
Lösungen zu Übungsblatt 8

1. Seien $a, b > 0$ und der stetig differenzierbare Weg $\gamma(t) := a\cos t + \mathrm{i}\, b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ gegeben.

Beh. (a): *Es gilt die folgende Gleichung:*

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{|z|=a} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Beweis. Für $a = b$ ist nichts zu zeigen. Sei also zuerst $a > b$. Sei im Folgenden β der Weg der durch $|z| = a$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinne, beschrieben wird. Der Weg γ und der Weg β haben folgende Gestalt für $a > b$ (hier $a = 2$ und $b = 1$):



Wir schreiben für das Wegintegral entlang β:

$$\int_\beta \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\beta \frac{\mathrm{d}z}{z} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Dabei ist $\tilde{\gamma}$ der Weg der durch Verknüpfen der Wege β und $-\gamma$ entsteht. Der Weg $\tilde{\gamma}$ beschreibt den Rand des markierten Bereiches, auf dem die Funktion $\frac{1}{z}$ holomorph ist. Mit dem Integralsatz von Cauchy folgt

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$$

und die Behauptung ist bewiesen für $a > b$. Der Fall $a < b$ wird analog bewiesen. □

Beh. (b): *Es gilt:*

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Beweis. Für die Kreislinie wissen wir aus der Vorlesung:

$$\int\limits_{|z|=a} \frac{\mathrm{d}z}{z} \; = \; 2\pi\mathrm{i}. \tag{1}$$

Berechne nun:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}\,\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-a\sin(t) + \mathrm{i}b\cos(t)}{a\cos(t) + \mathrm{i}b\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin(t)\cos(t)(b^2 - a^2) + \mathrm{i}ab}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Mit Gleichung (1) und Teilaufgabe (a) wissen wir, daß der Realteil dieses Integrals verschwindet, also

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin(t)\cos(t)(b^2 - a^2)}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = 0$$

gilt. Für den Imaginärteil gilt wiederum mit Gleichung (1) und Teilaufgabe (a):

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \; = \; 2\pi.$$

Das ist die gesuchte Gleichung. □

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{D(0,r)} \subset G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

   Beh.: *Es gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z}\,\frac{z + z_0}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}\operatorname{Im} f(0).$$

   Mit dieser Gleichung folgt die Poisson-Integralformel *für harmonische Funktionen: Ist $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch, dann gilt für $z_0 \in D(0,r)$:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(re^{\mathrm{i}t})\,\frac{r^2 - |z_0|^2}{|re^{\mathrm{i}t} - z_0|^2}\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Mit dem Hinweis

$$\frac{1}{z}\frac{z+z_0}{z-z_0} = \frac{2}{z-z_0} - \frac{1}{z}$$

und der Darstellung

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \bar{f}(z))$$

berechnen wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z} \frac{z+z_0}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = &\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} f(z) \frac{2}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} f(z) \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\ &+ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} \bar{f}(z) \frac{2}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} \bar{f}(z) \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{2}$$

Die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite von Gleichung (2) berechnen wir mit der Cauchy Integralformel und die beiden restlichen mit Teilaufgabe 5(b) von Übungsblatt 7:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} f(z) \frac{2}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0).$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} f(z) \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} f(0).$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} \bar{f}(z) \frac{2}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \bar{f}(0).$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{2} \bar{f}(z) \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \bar{f}(0).$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z} \frac{z+z_0}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0) - \frac{1}{2}(f(0) - \bar{f}(0)) = f(z_0) - \mathrm{i} \operatorname{Im} f(0)$$

Damit ist der erste Teil bewiesen.

Sei $R > r$, so daß $D(0,R) \subset G$. Die harmonische Funktion u eingeschränkt auf $D(0,R)$ kann als Realteil einer holomorphen Funktion f auf $D(0,R)$ gesehen werden:

$$f := u + \mathrm{i}v$$

Dabei ist v eine passende reellwertige Funktion. Mit der Formel aus dem ersten Teil ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} u(z_0) + \mathrm{i}v(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{u(z)}{z} \frac{z+z_0}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}v(0) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{u(re^{\mathrm{i}t})}{re^{\mathrm{i}t}} \frac{re^{\mathrm{i}t}+z_0}{re^{\mathrm{i}t}-z_0} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}v(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(re^{\mathrm{i}t}) \frac{r^2 - |z_0|^2 + 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(re^{-\mathrm{i}t}z_0)}{|re^{\mathrm{i}t}-z_0|^2}\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}v(0) \end{aligned}$$

Der Realteil obiger Gleichung ist die gesuchte Formel. □

3. **Beh.:** *Das Bild einer nichtkonstanten ganzen Funktion ist dicht in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen die ganze Funktion f hat kein dichtes Bild. Es existiert also $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, so daß $\operatorname{Bild} f \cap D(a, r) = \emptyset$. Damit ist die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,:\, z \mapsto \frac{1}{f(z) - a}$$

wohldefiniert und beschränkt:

$$\left| \frac{1}{f(z) - a} \right| \leq \frac{1}{r}.$$

Nach dem Satz von Liouville ist g damit konstant, also auch f. Dies steht nun aber im Widerspruch zur Voraussetzung. □