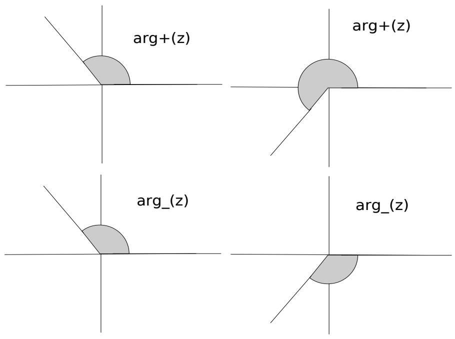
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Übungsblatt 7

1. Klar ist, dass beide Logarithmen dort wo sie beide definiert sind sich nur um etwas rein Imaginäres unterscheiden können, da sich ihre Definitionen nur durch die Art der Winkelmessungen (die Argumentfunktion) unterscheiden.



Aus der Graphik ist nun ersichtlich, dass die beiden Argumentfunktionen auf der oberen Halbebene übereinstimmen (linke Hälfte der Graphik), und sich auf der unteren Halbebene um $2\pi = arg_+(z) - arg_-(z)$ unterscheiden (rechte Hälfte der Graphik). Entsprechend stimmen Log_0 und L auf der oberen Halbebene überein und unterscheiden sich auf der unteren um $2\pi i$. Dies widerspricht *nicht* dem Identitätssatz, da der Bereich D auf dem beide Logarithmen definiert sind nicht zusammenhängend ist: $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}\} = OH \cup UH$ und der Identitätssatz nur etwas über Gebiete (also zusammenhängende, offene Mengen) aussagt.

2. (a) Die Figur Acht Kontur ist durch die Zusammensetzung der beiden Konturen

$$\alpha_1(t) = 1 - e^{it} \; t \in [0, 2\pi]$$

und

$$\alpha_2(t) = -1 + e^{-it} \; t \in [0, 2\pi]$$

Bitte wenden!

gegeben. Wir wissen nun aber, dass das Integral über die Zusammensetzung zweier Wege die Summe der Integrale über die beiden Wege ist und somit berechnen wir gesondert die Integrale über beide Wege und addieren die Ergebnisse. Wir verwenden die Partialbruchzerlegung um den Integranden in eine einfachere Form zu bringen:

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2(z+1)} + \frac{-1}{2(z-1)}$$

Jetzt ist aber der erste Term holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ und somit verschwindet das Integral über die Kontur α_1 (es liegt in einem Sterngebiet) nach dem Integralsatz von Cauchy. Genauso verschwindet das Integral des zweiten Terms über die Kontur α_2. Damit bleibt nur noch

$$\int_{\alpha_2} \frac{1}{2(z+1)} dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-ie^{-it}dt}{-1+e^{-it}+1} = -i\pi$$

und

$$\int_{\alpha_1} \frac{-1}{2(z-1)} dz = \frac{-1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-ie^{it}dt}{1-e^{it}-1} = -i\pi$$

zu berechnen. Damit ist

$$\int_{\alpha} \frac{1}{1-z^2} dz = -2\pi i$$

(b) Wir verwenden die Partialbruchzerlegung aus der ersten Teilaufgabe und mit der gleichen Argumentation wie zuvor verschwindet das Integral des ersten Terms und wir brauchen nur noch

$$\int_{\alpha} \frac{-1}{2(z-1)} dz$$

berechnen. Schlitzen wir nun die komplexe Zahlenebene entlang der negativen reellen Achse, beginnend bei 1 (also wir entfernen die Menge $\{z \in \mathbb{R} | z \leq 1\}$) dann ist dort $\frac{-1}{2(z-1)}$ holomorph und diese geschlitzte Ebene ein Sterngebiet. Das Integral über die Kontur α_1 bestehend aus dem Quadrat ohne der Seite auf der imaginären Achse hängt dann nach dem Integralsatz von Cauchy nur von seinen Endpunkten ab. Wir ersetzen deshalb die Kontur durch das Kreisstück $\gamma_1(t) = 1 + \sqrt{2}e^{it}$ $t \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ mit den gleichen Endpunkten. Das ist aber jetzt einfach zu berechnen und wir erhalten:

$$\frac{-1}{2} \int_{\alpha_1} \frac{1}{z-1} dz = \frac{-1}{2} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1} dz = -i\frac{3\pi}{4}$$

Analog schlitzen wir entlang der positiven reellen Achse beginnend bei 1 und erreichen somit, dass das Integral über den Teil des Quadrats auf der imaginären Achse α_2 nur von seinen Endpunkten abhängt. Wir ersetzen dieses Stück Kontur wie zuvor durch den Kreisbogen $\gamma_2(t) = 1 + \sqrt{2}e^{it}$ $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$und berechnen:

$$\frac{-1}{2} \int_{\alpha_2} \frac{1}{z-1} dz = \frac{-1}{2} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1} dz = -i\frac{\pi}{4}$$

Damit ist

$$\int_{\alpha} \frac{1}{1-z^2} dz = -i\pi$$

Naürlich kann man auch einfach parametrisieren und ausrechnen.

3. Nach dem Äquivalenzsatz kann man f um 0 in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

wobei für a_k gilt:

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz$$

Nun schätzen wir wie im Beweis des Satzes von Liouville, die k-te Ableitung von f an der Stelle 0 ab mit $r > R$:

$$|f^k(0)| = |\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz| \leq \frac{k!}{2\pi}\frac{Mr^n}{r^{k+1}}2\pi r = k!Mr^{n-k}$$

Für $k > n$ folgt somit $|f^k(0)| = 0$, da $f^k(0)$ unabhängig von r ist. Aber damit verschwinden alle Koeffizienten a_k mit $k > n$ der Potenzreihe oben. Damit ist also $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ ein Polynom. A priori war nicht klar, dass die Reihenentwicklung um 0 wie oben in ganz $\mathbb{C}$ zulässig war (tatsächlich ist der Konvergenzradius einer Potenzreihenentwicklung einer ganzen Funktion um einen beliebigen Punkt immer unendlich, aber das erfordert einen Beweis!). Hier hilft uns aber der Identitätssatz, da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist und f nach der Argumentation oben in einer Scheibe um die 0 durch das Polynom $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ dargestellt wird.

4. Die Holomorphie von f zeigt man leicht mit dem Wirtinger-kalkül:

$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})f = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(fh + i(ifh)) = 0$$

damit ist f holomorph. Um zu zeigen, dass h holomorph ist braucht man etwas mehr. Zuerst folgt aus dem Äquivalenzsatz, dass die Ableitung von f selbst wieder holomorph ist (f ist analytisch und ihre Ableitung deshalb auch). Ausserdem verschwindet f nach Voraussetzung nicht identisch auf dem Gebiet G, so dass die Nullstellen von f nach dem Identitätssatz isoliert sind. Sei N die (diskrete) Nullstellenmenge von f, dann definiert $\frac{f'}{2f}$ eine holomorphe Funktion auf $G \setminus N$. Nach Voraussetzung ist aber $f' = f_x - if_y = fh - i(ifh) = 2fh$ und damit $\frac{f'}{2f} = h$ auf $G \setminus N$. Also ist h dort holomorph. Da nun aber h stetig in ganz G ist und die Nullstellen von f isoliert sind, lässt sich $\frac{f'}{2f}$ stetig auf ganz G fortsetzen (durch h). Nach dem Riemannschen Hebungssatz ist damit aber h (die Fortsetzung) in ganz G schon holomorph.

5. (a) Sei

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} + g(\zeta)\right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} g(\zeta)d\zeta$$

mit $g(\zeta) := \frac{\bar{z}f(\zeta)}{r^2 - \bar{z}\zeta}$. Da $|\bar{z}| < r$ ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$|r^2 - \zeta\bar{z}| > 0$$

für alle $\zeta \in D(0, r+\epsilon)$. Sei nun ϵ so klein, dass f auf $D(0, r+\epsilon)$ definiert ist (das geht, da f in einer Umgebung von $\overline{D}(0,\epsilon)$ definiert ist). Dann ist g holomorph in $D(0, r+\epsilon)$ (in der Variablen ζ!) und das zweite Integral verschwindet nach dem Integralsatz von Cauchy. Das erste Integral hingegen ist nach der Integralformel von Cauchy genau $f(0)$. Insgesamt ergibt sich somit für I die linke Seite der behaupteten Gleichung.
Andererseits bilden wir den Hauptnenner des Integranden:

$$\frac{f(\zeta)(r^2 - \zeta\bar{z}) + \bar{z}f(\zeta)\zeta}{\zeta(r^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{r^2 f(\zeta)}{\zeta(r^2 - \zeta\bar{z})}$$

und verwenden, dass für $\zeta = re^{it}$, $\zeta\bar{\zeta} = r^2$ gilt:

$$\frac{\zeta\bar{\zeta}f(\zeta)}{\zeta(\zeta\bar{\zeta} - \zeta\bar{z})} = \frac{\bar{\zeta}f(\zeta)}{\zeta\bar{\zeta} - \zeta\bar{z}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$$

wie behauptet.

(b) Wir verwenden die Gleichung aus der ersten Teilaufgabe und gehen zur Parametrisierung des Integrals über:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}}\frac{re^{-it}}{re^{-it} - \bar{z}} ire^{it} dt$$

Nun gilt

$$\overline{\int_a^b g(t)dt} = \int_a^b \bar{g}(t)dt$$

oder

$$c(\int_a^b g(t)dt) = \int_a^b c \circ g(t)dt$$

und damit ist

$$\bar{f}(0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} c\left(\frac{f(re^{it})}{re^{it}}\frac{re^{-it}}{re^{-it} - \bar{z}} ire^{it}\right) dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{c \circ f(re^{it})}{re^{-it}}\frac{re^{it}}{re^{it} - z}(-i)re^{-it}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{f}(re^{it})}{re^{it} - z} ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{\bar{f}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

6. (a) $|f|$ ist also eine stetige Funktion von $\bar{G}$ nach $\mathbb{R}$. Da $\bar{G}$ sowohl abgeschlossen, als auch beschränkt ist, ist es nach $Heine - Borel$ auch kompakt. Eine stetige Funktion auf von einer kompakten Menge nach $\mathbb{R}$ nimmt nun aber ihr Maximum an. Also existiert ein $z_0 \in \bar{G}$ mit $|f(z_0)| = M$ und

$$|f(z)| \leq M \ \forall z \in \bar{G}$$

Nach dem Maximumsprinzip kann aber z_0 kein innerer Punkt von $\bar{G}$ (also ein Punkt in G) sein, da z_0 im Besonderen ein lokales Maximum ist. Damit nimmt also f sein Maximum auf dem Rand von G an.

(b) Wir definieren eine Funktion $g\colon \bar{G} \to \mathbb{C}$ durch $g(z) = f(z)$ für alle $z \in G$ und $g(z) = 0$ für alle $z \in \partial G$. Dann ist durch die Voraussetzung g holomorph in G und stetig auf dem Rand von $\bar{G}$: Sei z_i eine Folge von komplexen Zahlen mit $z_i \in \bar{G}$ und $z_i \to z$ wenn $i \to \infty$ mit $z \in \partial G$. Dann gibt es aber für gegebenes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wie in der Voraussetzung und ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall i \geq N$ gilt: $|z_i - z| < \delta$ und damit $|g(z_i) - g(z)| = |g(z_i)| < \epsilon$. g ist also stetig in $\bar{G}$ und damit nimmt g nach der ersten Teilaufgabe sein Betragsmaximum auf dem Rand ∂G von G an. Da dort g aber Null ist, muss g bereits die Nullfunktion auf ganz G gewesen sein.