Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
A. Stadelmaier
M. Schwingenheuer

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Lösungen zu Übungsblatt 6

1. Gegeben sei folgende konforme Abbildung

$$f : z \longmapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) . \tag{1}$$

Diese wird auch Joukowski Abbildung genannt und ist in der Aerodynamik wichtig. Diese konforme Abbildung wurde verwendet, um Tragflächenprofile zu modellieren, und es sollen im Folgenden die Bilder von Kreislinien unter f skizziert werden. Zeichnen Sie dazu die Bilder unter f der Kreise, welche durch i verlaufen und als Mittelpunkt

(a) den Ursprung

Lösung: Der Kreis, der durch i verläuft und den Ursprung als Mittelpunkt besitzt, ist gegeben durch $\mathrm{e}^{2\pi it}$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$f(\mathrm{e}^{2\pi it}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\pi it} + \mathrm{e}^{-2\pi it}\right) = \frac{1}{2}\, 2\cos(2\pi t) = \cos(2\pi t) \tag{2}$$

Daher ist das Bild es Kreises durch i mit Mittelpunkt 0 gegeben durch die Strecke $[-1, 1]$, die zwei mal durchlaufen wird.

(b) die komplexe Zahl $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$ und

Lösung: Bestimmen wir zunächst allgemein den Kreis, der durch i verläuft und als Mittelpunkt eine beliebige vorgegebene komplexe Zahl $z_0 = x_0 + iy_0$ besitzt. Der Radius dieses Kreises beträgt dann $r = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + 1 - 2y_0}$ und eine Parameterdarstellung dieses Kreises ist dann durch

$$z(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{2\pi i\, t}, \quad t \in [0, 1] \tag{3}$$

gegeben. Zunächst fällt auf, dass $f(i) = 0$. Da i auf jedem der angegebenen Kreise liegt folgt, dass alle zu zeichnenden Kurven durch den Ursprung gehen. Geben wir zunächst die Schnittpunkte des Bildes von $z(t)$ unter f mit der y-Achse an, d.h. die Punkte, für die $\mathrm{Re}\, f(z(t)) = 0$ gilt. Eine numerische Lösung der resultierenden Gleichung liefert zwei Lösungen $t_1 \approx 0,23$ und $t_2 \approx 0,76$, mit $f(z(t_1)) \approx 0$ und $f(z(t_2)) \approx i\frac{9}{40}$. Die Gleichung $\mathrm{Im}\, f(z(t)) = 0$, d.h. die Schnittpunkte des Bildes von $z(t)$ unter f mit der x-Achse, liefert hingegen $t_3 = t_1$, $t_4 \approx 0,52$ und $t_5 \approx 0,98$, mit $f(z(t_3)) \approx 0$, $f(z(t_4)) \approx -1$ und $f(z(t_5)) \approx \frac{41}{40}$. Als nächstes bestimmen wir die Werte von t, für die $f(z)$ eine vertikale Tangente besitzt, d.h. $\mathrm{Re}\frac{d}{dt}f(z(t)) = 0$. Dies liefert $t_6 \approx t_4$ und $t_7 \approx t_5$. Eine horizontale Tangente, d.h. $\mathrm{Im}\frac{d}{dt}f(z(t)) = 0$ erhalten wir hingegen für $t_8 \approx 0,084$, $t_9 \approx 0,34$ und $t_{10} \approx 0,808$, mit $f(z(t_8)) \approx 0,78 - 0,08i$, $f(z(t_9)) \approx -0,56 + 0,036i$ und $f(z(t_{10})) \approx 0,30 + 0,24i$. Das Bild des Kreises durch i mit Mittelpunkt $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$ unter f ist in Abb. 1 zu sehen.

(c) $-\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$ besitzen.

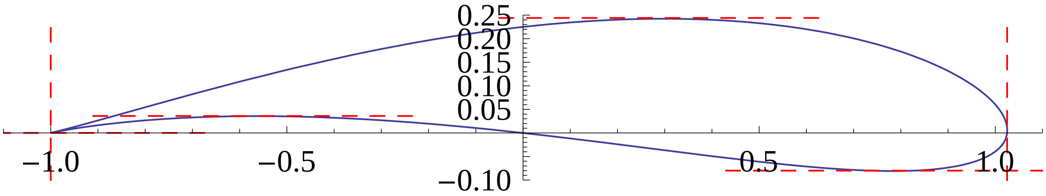

Abbildung 1: Bild des Kreises durch i mit Mittelpunkt $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$ unter f.

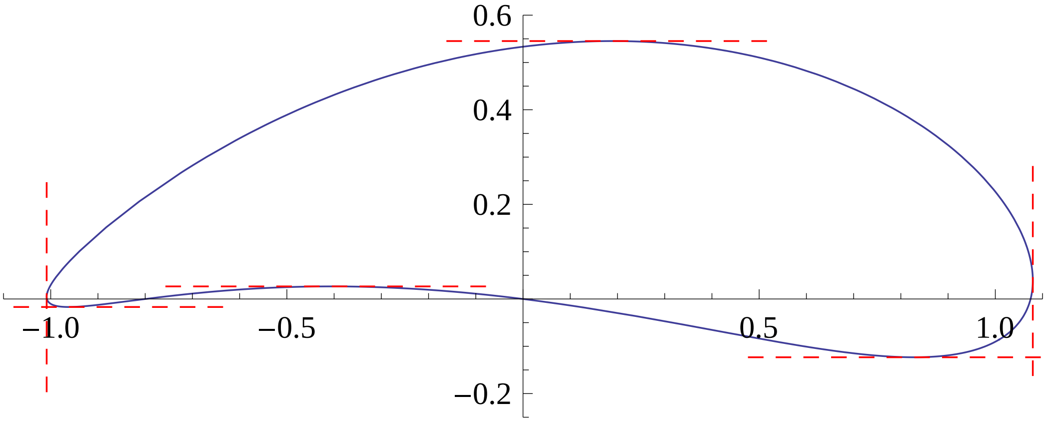

Abbildung 2: Bild des Kreises durch i mit Mittelpunkt $-\frac{1}{10} + \frac{2}{10}i$ unter f.

Lösung: Wir geben wieder zunächst die Schnittpunkte des Bildes von $z(t)$ unter f mit der y-Achse an, d.h. die Punkte, für die $\operatorname{Re} f(z(t)) = 0$ gilt. Lösen wir auch diese und die folgenden Gleichungen numerisch, liefert dies zwei Lösungen $t_1 \approx 0,23$ und $t_2 \approx 0,77$, mit $f(z(t_1)) \approx 0$ und $f(z(t_2)) \approx i\frac{16}{30}$. Die Gleichung $\operatorname{Im} f(z(t)) = 0$, d.h. die Schnittpunkte des Bildes von $z(t)$ unter f mit der x-Achse, liefert $t_3 = t_1$, $t_4 \approx 0,42$, $t_5 \approx 0,54$ und $t_6 \approx 0,96$, mit $f(z(t_3)) \approx 0$, $f(z(t_4)) \approx -0,8, f(z(t_5)) \approx -1,008$ und $f(z(t_6)) \approx 1,075$. Als nächstes bestimmen wir die Werte von t, für die $f(z)$ eine vertikale Tangente besitzt, d.h. $\operatorname{Re}\frac{d}{dt} f(z(t)) = 0$. Dies liefert $t_7 \approx 0,55$ und $t_8 \approx 0,95$, mit $f(z(t_7)) \approx -1,008 + 0,005i$ und $f(z(t_8)) \approx 1,08 + 0,04i$. Eine horizontale Tangente, d.h. $\operatorname{Im}\frac{d}{dt} f(z(t)) = 0$ erhalten wir hingegen für $t_9 \approx 0,0555$, $t_{10} \approx 0,314$, $t_{11} \approx 0,488$ und $t_{12} \approx 0,79$, mit $f(z(t_8)) \approx 0,83 - 0,123i$, $f(z(t_9)) \approx -0,40 + 0,027i$, $f(z(t_9)) \approx -0,962 - 0,017i$ und $f(z(t_{10})) \approx 0,19 + 0,55i$. Das Bild des Kreises durch i mit Mittelpunkt $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$ unter f ist in Abb. 2 zu sehen.

2. Man bestimme mit Hilfe des Integralsatzes und der Integralformel von Cauchy das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z^2+1)} dz \tag{4}$$

längs der Kreislinien γ

(a) um 1 mit Radius $\frac{1}{2}$,

Lösung: Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{z(z+i)(z-i)} \tag{5}$$

Da die Funktion im Inneren des Kreises um 1 mit Radius $\frac{1}{2}$ holomorph ist, besitzt sie daher in diesem (gesamten) Gebiet eine Stammfunktion. Deshalb ist nach dem lokalen Cauchy Integralsatz klar, dass das Integral verschwinden muss.

(b) um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$,

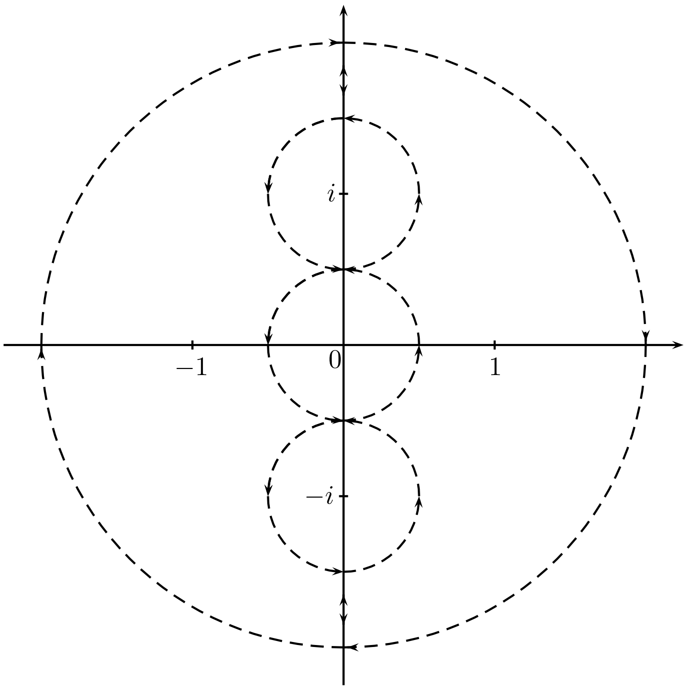

Abbildung 3: Diese Abbildung zeigt die Kurven über die integriert werden soll. Der äußerste Kreis ist im mathematisch negativen Sinn orientiert, um zu verdeutlichen, dass die Integration über den Kreis um 0 mit Radius 2 äquivalent ist zu der Summe einer Kreisintegration um die Polstellen der Funktion.

Lösung: Wir verwenden die Cauchy Integralformel für analytische Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{6}$$

Da $\frac{1}{(\zeta+i)(\zeta-i)}$ auf der gesamten Kreisscheibe um 0 holomorph ist, gilt demnach

$$\int\limits_{\gamma_0} \frac{1}{\zeta(\zeta+i)(\zeta-i)}\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_0} \frac{\frac{1}{(\zeta+i)(\zeta-i)}}{\zeta - 0}\, d\zeta = 2\pi i \frac{1}{(0+i)(0-i)} = 2\pi i\,, \tag{7}$$

wobei γ_0 den Weg um die 0 bezeichnet.

(c) um i mit Radius $\frac{1}{2}$ und

Lösung: Da $\frac{1}{\zeta(\zeta+i)}$ auf der ganzem Kreisscheibe um i holomorph ist, verwenden wir auch hier wieder (6). Damit ist

$$\int\limits_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta(\zeta-i)(\zeta+i)}\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_i} \frac{\frac{1}{\zeta(\zeta+i)}}{\zeta - i}\, d\zeta = 2\pi i \frac{1}{i(i+i)} = -i\pi\,, \tag{8}$$

wobei wir mit γ_i den Weg um i bezeichnen.

(d) um 0 mit Radius 2

Lösung: Hier können wir die Cauchy Integralformel nicht so ohne weiteres einsetzen. Wenn wir Abb. 3 betrachten, fällt auf, dass der eingezeichnete Weg in zwei Teilwege zerfällt, in deren Inneren keine Polstellen von f liegen und daher das Integral über diese Wege nach dem lokalen Cauchy Integralsatz verschwindet. Beachten wir nun noch, dass die Integrale über die geraden Kurvenabschnitte auf der y-Achse verschwinden, da in beide Richtungen jeweils integriert wird, und das die Kurvenintegration das Vorzeichen ändert, falls sich die Orientierung ändert, so folgt, dass die Integration von f über den großen Kreis gleich der Summe der Integration von f über kleine Kreise um die Polstellen ist. Daher verbleibt es noch, das Integral über einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um $-i$ zu bestimmen. Dieses ist gegeben durch

$$\int\limits_{\gamma_{-i}} \frac{1}{\zeta(\zeta-i)(\zeta+i)}\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_{-i}} \frac{\frac{1}{\zeta(\zeta-i)}}{\zeta - (-i)}\, d\zeta = 2\pi i \frac{1}{-i(-2i)} = -i\pi \tag{9}$$

Daher gilt, dass

$$\int\limits_{\gamma_R} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_{-i}} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\gamma_i} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i - i\pi - i\pi = 0\,. \tag{10}$$

3. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Integralsatz und die Integralformel von Cauchy zu nutzen um folgendes Integral zu bestimmen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = c\,. \tag{11}$$

Sei dazu $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Bestimmen Sie nun das Wegintegral

(a) längs einer geschlossenen Kreislinie mit kleinem Radius $\epsilon > 0$ um i und

Lösung: Sei $\gamma_\epsilon = i + \epsilon\, \mathrm{e}^{2\pi i t}$. Dann ist $\frac{1}{\zeta+i}$ holomorph auf der ganzen Kreisscheibe U, mit $\gamma_\epsilon = \partial U$. Daher gilt nach der Cauchy Integralformel

$$\int\limits_{\gamma_\epsilon} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_\epsilon} \frac{\frac{1}{\zeta+i}}{\zeta - i}\, d\zeta = 2\pi i \frac{1}{i+i} = \pi \tag{12}$$

Lösung:

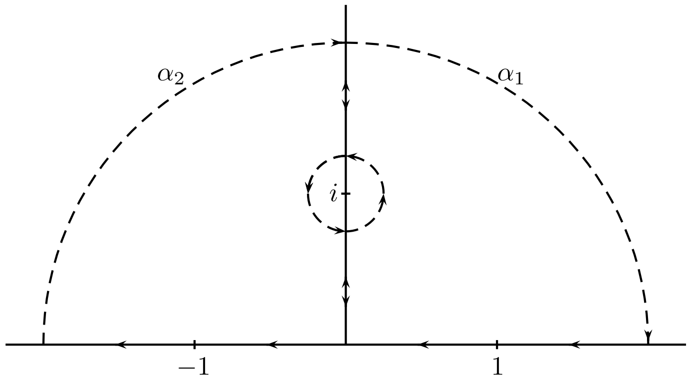

Abbildung 4: Visualisierung der Wege α_1, α_2 und γ^{-1}.

(b) längs des geschlossenen Weges, welcher durch die Strecke von $-R$ nach $+R$ und den Halbkreisbogen γ_R von R nach $-R$ im Gegenuhrzeigersinn (in der oberen Halbebene) gebildet wird. (Ergebnis: π).

Lösung: Bezeichnen wir mit γ den Weg, über den Integriert werden soll und betrachten wir folgenden Weg, der in Abb. 4 dargestellt ist. α_1 verläuft von R nach 0, von 0 nach $i - i\epsilon$, rechter Halbkreis um i nach $i + i\epsilon$, Strecke nach iR und Viertelkreis zurück zu R. α_2 verläuft von 0 nach $-R$, Viertelkreis um 0 mit Radius R zu iR, Strecke nach $i + i\epsilon$, linker Halbkreis nach $i - i\epsilon$ und schließlich von $i - i\epsilon$ über eine Strecke zurück zur 0. Es gilt nach lokalem Integralsatz, dass

$$\int\limits_{\alpha_1} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\alpha_2} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{13}$$

und damit

$$\int\limits_{\alpha_1} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\alpha_2} f(\zeta)\, d\zeta = -\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\gamma_\epsilon} f(\zeta)\, d\zeta = 0\,. \tag{14}$$

Daher folgt

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\gamma_\epsilon} f(\zeta)\, d\zeta = \pi \tag{15}$$

(c) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\, dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{16}$$

und verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse, um c zu bestimmen.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(\zeta)\, d\zeta &= \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{1}{R^2 \mathrm{e}^{4\pi i t} + 1} 2\pi i R \mathrm{e}^{2\pi i t}\, dt = 2\pi i \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{4\pi i t} + \frac{1}{R^2}}\, dt \\ &= 2\pi i \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i t}\, dt = 0 \Rightarrow \end{aligned} \tag{17}$$

$$c = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta = 2 \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta^2+1}\, d\zeta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi$$

Disclaimer Diese Lösungen sind als Lösungsskizzen zu verstehen und erheben nicht den Anspruch auf Fehlerfreiheit.