Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Übungen zur Funktionentheorie

Lösungen zu Übungsblatt 5

1. (a) Identitäten für die Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$, wobei f und g (reell) partiell differenzierbare Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ sind:

Beh. (i): $\partial(fg) = (\partial f)g + f\partial g$.

Beweis. Verwende die Produktregel im Reellen:

$$\partial(fg) = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y)(fg) = \frac{1}{2}((\partial_x f)g + f\partial_x g - \mathrm{i}(\partial_y f)g - \mathrm{i}f\partial_y g) = (\partial f)g + f\partial g$$

□

Beh. (ii): $\overline{\partial f} = \bar{\partial}\bar{f}$.

Beweis. Verwende die Regeln für die komplexe Konjugation:

$$\overline{\partial f} = \frac{1}{2}\overline{(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y)f} = \frac{1}{2}(\overline{\partial_x f} - \overline{\mathrm{i}\partial_y f}) = \frac{1}{2}(\partial_x \bar{f} + \mathrm{i}\partial_y \bar{f}) = \bar{\partial}\bar{f}$$

□

Beh. (iii): $\bar{\partial}(f \circ g) = ((\partial f) \circ g)\bar{\partial} g + ((\bar{\partial} f) \circ g)\bar{\partial}\bar{g}$.

Beweis. Schreibe die Funktion g als Summe von Real- und Imaginärteil:

$$g = u + \mathrm{i}v$$

Berechne nun mit Hilfe der reellen Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}(f \circ g) &= \frac{1}{2}(((\partial_u f) \circ g)\partial_x u + ((\partial_v f) \circ g)\partial_x v) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(((\partial_u f) \circ g)\partial_y u + ((\partial_v f) \circ g)\partial_y v) \\
&= ((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial} u + ((\partial_v f) \circ g)\bar{\partial} v \\
&= \frac{1}{2}((((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial} u) - (((\mathrm{i}\partial_v f) \circ g)\bar{\partial}(\mathrm{i}v)) + (((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial} u) + (((\mathrm{i}\partial_v f) \circ g)\bar{\partial}(-\mathrm{i}v))) \\
&= \frac{1}{2}((((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial} u) - (((\mathrm{i}\partial_v f) \circ g)\bar{\partial}(\mathrm{i}v)) + (((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial} u) + (((\mathrm{i}\partial_v f) \circ g)\bar{\partial}(-\mathrm{i}v)) \\
&\quad + (((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial}(\mathrm{i}v)) - (((\mathrm{i}\partial_v f) \circ g)\bar{\partial} u) + (((\partial_u f) \circ g)\bar{\partial}(-\mathrm{i}v)) + (((\mathrm{i}\partial_v f) \circ g)\bar{\partial} u)) \\
&= ((\partial f) \circ g)\bar{\partial} g + ((\bar{\partial} f) \circ g)\bar{\partial}\bar{g}
\end{aligned}$$

□

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $V \subset \mathbb{C}$ eine weitere offene Teilmenge. $f : U \to V$ sei eine konforme und sogar zweimal stetig differenzierbare, surjektive Funktion und $g : V \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

Beh.: *g ist genau dann harmonisch, wenn $g \circ f$ harmonisch ist.*

Beweis. Schreibe die Funktion f als Summe von Real- und Imaginärteil:

$$f = u + \mathrm{i}v$$

Verwende die Cauchy-Riemann Gleichungen, also:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x,$$

und berechne mit Hilfe der reellen Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\Delta(g \circ f) &= \partial_{xx}(g \circ f) + \partial_{yy}(g \circ f) \\
&= \partial_x((g_u \circ f)u_x + (g_v \circ f)v_x) + \partial_y((g_u \circ f)u_y + (g_v \circ f)v_y) \\
&= (g_{uu} \circ f)u_x^2 + (g_{uv} \circ f)u_x v_x + (g_u \circ f)u_{xx} \\
&\quad + (g_{vu} \circ f)u_x v_x + (g_{vv} \circ f)v_x^2 + (g_v \circ f)v_{xx} \\
&\quad + (g_{uu} \circ f)\underbrace{u_y^2}_{=v_x^2} + (g_{uv} \circ f)u_y v_y + (g_u \circ f)u_{yy} \\
&\quad + (g_{vu} \circ f)v_y u_y + (g_{vv} \circ f)\underbrace{v_y^2}_{=u_x^2} + (g_v \circ f)v_{yy} \\
&= ((g_{uu} + g_{vv}) \circ f)u_x^2 + ((g_{uu} + g_{vv}) \circ f)v_x^2 \\
&\quad + (g_{uv} \circ f)(2u_x v_x + 2\underbrace{u_y v_y}_{=-v_x u_x}) + (g_x \circ f)(\underbrace{u_{xx}}_{=-u_{yy}} + u_{yy}) + (g_y \circ f)(\underbrace{v_{xx}}_{=-v_{yy}} + v_{yy}) \\
&= (u_x^2 + v_x^2)((g_{uu} + g_{vv}) \circ f) \\
&= |f'|^2((\Delta g) \circ f)
\end{aligned}$$

Ist g harmonisch so folgt, daß auch $(g \circ f)$ harmonisch ist. Für die andere Richtung sei jetzt $(g \circ f)$ harmonisch. Dann gilt:

$$((\Delta g) \circ f)(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in U,$$

weil $|f'| \neq 0$ gilt, da f konform ist. Es wurde f surjektiv vorausgesetzt, damit ist g harmonisch. □

2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$. Definiere eine reelle Gerade $G := \{z \in \mathbb{C} | z = rw, r \in \mathbb{R}\}$. Sei weiterhin f holomorph in $U \backslash G$. Seien z_1, z_2, z_3 drei Punkte in U, so daß die von ihnen aufgespannte Dreiecksfläche Δ ganz in U enthalten ist.

Beh.: *Unter diesen Voraussetzungen gilt:*

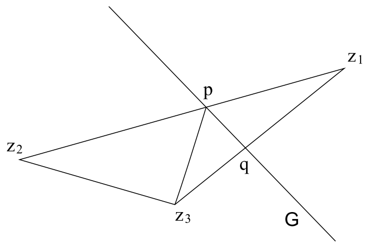
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis.

(a) Besteht der Schnitt $\Delta \cap G$ aus einem Punkt oder ist er leer, so gilt die Behauptung nach Vorlesung (schwächere Voraussetzung zum Lemma von Goursat, siehe (10.6)).

(b) Besteht der Schnitt $\Delta \cap G$ aus mehr als einem Punkt, so können wir dies auf den Fall, daß G das Dreieck Δ in genau einer der Kanten des Dreiecks schneidet, reduzieren:

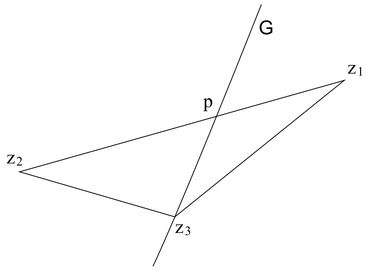
(i) Enthält der Schnitt keinen Eckpunkt von Δ, so können wir folgende Unterteilung in kleinere Dreiecke wählen:



Es gilt dann:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[z_1,p,q]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[p,z_3,q]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[p,z_2,z_3]} f(z)\,\mathrm{d}z$$

(ii) Enthält der Schnitt genau einen Eckpunkt von Δ, so wählen wir folgende Unterteilung in kleinere Dreiecke:



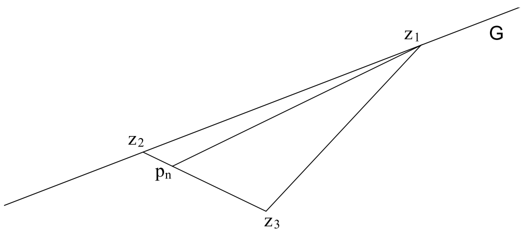
Es gilt jetzt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[z_1,p,z_3]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[p,z_2,z_3]} f(z)\,\mathrm{d}z$$

(c) Sei nun o.E. $\Delta \cap G = [z_1, z_2]$. Sei $(t_n)_n$ eine Folge in $[0,1]$ mit $t_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Definiere Punkte p_n durch:

$$p_n := z_2 + t_n(z_3 - z_2).$$

Wir betrachten nun folgende Unterteilung von Δ:



Für alle n gilt also:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[z_1,z_2,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[z_1,p_n,z_3]} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

wobei das zweite Integral wieder nach Vorlesung, (10.6), verschwindet. Das erste Integral schreiben wir als Summe:

$$\int_{[z_1,z_2,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[z_2,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[p_n,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nun gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[z_2,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

denn für $n \to \infty$ geht die Länge $L([z_2,p_n])$ des Weges $[z_2,p_n]$ gegen null. Die Funktion f ist stetig auf U, damit gilt: $||f||_\Delta < \infty$. Also gilt für beliebiges $\epsilon > 0$ für n groß genug:

$$\left| \int_{[z_2,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq ||f||_\Delta\, L([z_2,p_n]) < \epsilon.$$

Für den Beweis der Behauptung bleibt noch zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[z_1,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,\mathrm{d}z$$

gilt. Sei also $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf Δ finden wir $\delta > 0$, so daß für $|[z_1,p_n](t) - [z_1,z_2](t)| < \delta$ gilt:

$$|f([z_1,p_n](t)) - f([z_1,z_2](t))| < \epsilon.$$

Für die Differenz der Wege zur Zeit t gilt:

$$|[z_1,p_n](t) - [z_1,z_2](t)| = t\,t_n\,|z_3 - z_2| \leq t_n\,|z_3 - z_2|$$

Für n groß genug gilt:

$$t_n\,|z_3 - z_2| < \delta \quad \text{und} \quad t_n\,|z_3 - z_2| < \epsilon$$

Damit erhalten wir also für n groß genug:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{[z_1,p_n]} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq \int_0^1 |f([z_1,p_n](t))(p_n - z_1) - f([z_1,z_2](t))(z_2 - z_1)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 |f([z_1,z_2](t)) - f([z_1,p_n](t))|\,|z_1| + |f([z_1,p_n](t))p_n - f([z_1,z_2](t))z_2|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 |f([z_1,z_2](t)) - f([z_1,p_n](t))|\,|z_1| + |f([z_1,p_n](t)) - f([z_1,z_2](t))|\,|z_2| \\
&\qquad + t_n\,|f([z_1,p_n](t))|\,|z_3 - z_2|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \epsilon\,(|z_1| + |z_2| + ||f||_\Delta)
\end{aligned}$$

□

3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stückweise einmal stetig differenzierbarer Weg. Sei $\gamma^{-1} : [a,b] \to U$, $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a+b-t)$. Sei ferner $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Beh. (a): *Es gilt:*

$$\int\limits_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis. Berechne unter Verwendung der Kettenregel:

$$\int\limits_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\gamma^{-1}(t))(\gamma^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)(-1)\,\mathrm{d}t$$

Substituiere nun $t' := a+b-t$:

$$\int\limits_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)(-1)\,\mathrm{d}t = \int\limits_b^a f(\gamma(t'))\gamma'(t')\,\mathrm{d}t' = -\int\limits_a^b f(\gamma(t'))\gamma'(t')\,\mathrm{d}t' = -\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

$\square$

Beh. (b): *Gelte nun für f zusätzlich, daß $|f(z)| \leq C$, $C \in \mathbb{R}^+$ für $z \in \mathrm{Bild}\gamma$. Bezeichne $L(\gamma)$ die Länge des Weges γ. Dann gilt:*

$$\left|\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| \leq CL(\gamma).$$

Beweis. Für eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\left|\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int\limits_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t,$$

Sei dazu

$$w := \int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

und berechne:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 &= \bar{w}\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \bar{w}g(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int\limits_a^b \bar{w}g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int\limits_a^b \mathrm{Re}\,(\bar{w}g(t))\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int\limits_a^b |\bar{w}|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t = |\bar{w}|\int\limits_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\int\limits_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für g gezeigt. Für den Beweis der Behauptung (b) der Aufgabe berechnen wir nun:

$$\left|\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int\limits_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq C\int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = CL(\gamma).$$

$\square$

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant.

Beh. (a): *Für $a \in \mathbb{C}$ ist die Menge $G\backslash f^{-1}(a)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis. Da f stetig ist, ist das Urbild des Punktes a unter f abgeschlossen. G ist offen, also ist damit auch $G\backslash f^{-1}(a)$ offen. Es bleibt zu zeigen, daß $G\backslash f^{-1}(a)$ auch bogenweise zusammenhängend ist. Dazu zeigen wir, daß es für zwei beliebige Punkte x und y in $G\backslash f^{-1}(a)$ einen stückweise glatten Weg gibt, der die beiden Punkte verbindet.

Aus der Vorlesung (6.1) wissen wir, daß die Nullstellen einer nichtkonstanten analytischen Funktion auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ isoliert sind. Ist $a \neq 0$ so definiere die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ durch:

$$g(z) := f(z) - a$$

Die Funktion g ist ebenfalls analytisch und nichtkonstant uns es gilt:

$$f^{-1}(a) = g^{-1}(0)$$

Damit ist die Menge $f^{-1}(a)$ diskret in G.

Wähle nun einen stückweise glatten Weg γ in G, der x mit y verbindet. Das Bild des Weges ist kompakt in G, daher ist $K := f^{-1}(a) \cap \operatorname{Bild} \gamma$ endlich. Wäre der Schnitt unendlich, so würde es wegen der Kompaktheit einen Häufungspunkt z in K geben, so daß jede ϵ-Umgebung von z einen Punkt aus $f^{-1}(a)$ enthalten würde, was der Isoliertheit widerspricht.

Wegen der Isoliertheit kann man nun um die endlich vielen Punkte in K ϵ-Umgebungen in G finden, die nur einen Punkt aus K treffen. Innerhalb dieser Umgebungen kann nun den Punkten stückweise glatt ausgewichen werden: wähle einen Radius r klein genug, so daß der Schnitt des Kreises mit Radius r um einen Punkt $w = \gamma(t_0)$ aus K aus zwei Punkten p und q besteht, so daß $p = \gamma(t_p)$ mit $t_p < t_0$ und $q = \gamma(t_q)$ mit $t_q > t_0$ gilt. Ersetze dann den Weg $\gamma([t_p, t_q])$ durch einen Kreisabschnitt der p mit q verbindet. Das Ergebnis ist ein stückweise glatter Weg von x nach y in G, der $f^{-1}(a)$ nicht trifft. □

Beh. (b): *Das Bild von G unter f besitzt innere Punkte.*

Beweis. Da die Funktion f nicht konstant ist, existiert ein $z \in G$, so daß $f'(z) \neq 0$. Der Umkehrsatz für reelle Funktionen überträgt sich auf komplex differenzierbare Funktionen: An der Stelle z ist die (reelle) Multiplikation mit der Jacobimatrix bijektiv. Mit dem reellen Satz finden wir also eine offene Umgebung $U \subset G$ von z, auf der $f'(z) \neq 0$ und $f|_U$ die Umgebung U bijektiv auf $V := \operatorname{Bild} f|_U$ abbildet. Mit dem reellen Satz folgt ebenso, daß V offen in $\mathbb{C}$ ist, also ist $V \subset G$ offene Umgebung von $f(z)$, also $f(z)$ ein innerer Punkt. □

5. (a) Sei $Log_0 : \mathbb{C}^{\star\star} \to S$ der Hauptzweig des Logarithmus definiert als Umkehrfunktion von $\exp : S \to \mathbb{C}^{\star\star}$, wobei $S := \{z \in \mathbb{C} | -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Bezeichne $[1, z]$ den geraden Weg von 1 nach z. Sei $L : \mathbb{C}^{\star\star} \to \mathbb{C}$ definiert durch das folgende Integral:

$$L(z) := \int_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Beh. (i): *Es gilt: $L = Log_0$.*

Beweis. Wir wissen, daß die Umkehrfunktion Log_0 sogar analytisch, also auch komplex differenzierbar ist. Für die Ableitung gilt:

$$Log_0'(z) = \frac{1}{z}$$

Dies kann man z.B. mit dem Umkehrsatz begründen. Danach gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion g einer holomorphen Funktion f:

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

Der Hauptwert des Logarithmus Log_0 ist also Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$. Berechne nun:

$$L(z) = \int\limits_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = Log_0(z) - Log_0(1) = Log_0(z)$$

□

Sei nun $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(\phi) := \exp(\mathrm{i}\phi)$ ein geschlossener Weg.

Beh. (ii):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = 2\pi\mathrm{i}.$$

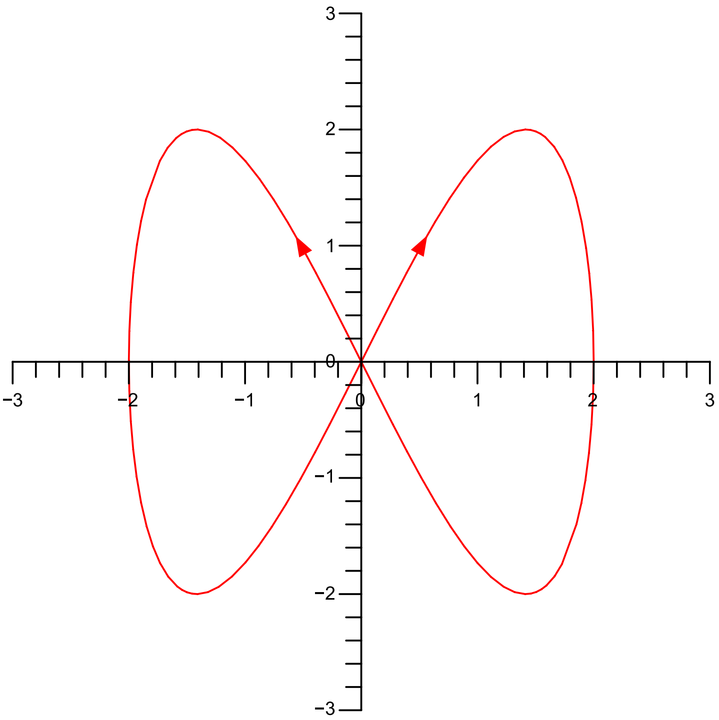
Beweis.

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\exp(\mathrm{i}\phi)\mathrm{i}}{\exp(\mathrm{i}\phi)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$$

□

(b) Betrachten Sie im folgenden den Weg $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := 2(-\sin(t) + \mathrm{i}\sin(2t))$.

Beh. (i): *Dieser Weg in der komplexen Ebene verläuft wie folgt:*



Beh. (ii):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Beweis. Anhand der Skizze aus Teil (i) sieht man, daß der Weg in zwei Teilen durchlaufen werden kann, wobei der erste Teil nur rechts, der zweite Teil nur links der imaginären Achse verläuft und beide Teile bei 0 starten und enden. Sei der erste Teil γ_1 und der zweite γ_2. Somit gilt für das Integral:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\,\mathrm{d}\zeta + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Der Weg γ_1 wird dabei von dem Intervall $[-\pi, 0]$ parametrisiert und der Weg γ_2 von dem Intevall $[0, \pi]$. Beachte nun, daß für den Weg γ folgendes gilt:

$$\gamma(t) = -\gamma(-t) \quad \text{und} \quad \gamma'(t) = \gamma'(-t)$$

Berechne nun:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_1} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\,\mathrm{d}\zeta &= \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\gamma(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t))^2 - 1} = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{\gamma(-t)\gamma'(-t)}{(\gamma(-t))^2 - 1} \\
&= \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\gamma(-t)\gamma'(-t)}{(\gamma(-t))^2 - 1} = -\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\gamma(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t))^2 - 1} \\
&= -\int\limits_{\gamma_2} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\,\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

□

6. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, mit $c \neq 0$ und $D := ad - bc \neq 0$, und M die zugehörige Möbiustransformation:

$$M : \mathbb{C}\backslash\{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{\tfrac{a}{c}\} \quad \text{mit } M(z) := \tfrac{az+b}{cz+d}$$

Das Doppelverhältnis der vier Punkte $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sowie $z_0 \neq z_3$ ist definiert durch

$$\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Beh. (a): *Jede Möbiustransformation M läßt sich als Komposition von 5 Abbildungen der genannten Art schreiben.*

Beweis. Definiere die folgenden 5 Abbildungen:

(i) $F_1 : \mathbb{C}\backslash\{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{-d\}$ mit $F_1(z) := cz$. Diese Abbildung ist eine Drehstreckung.

(ii) $F_2 : \mathbb{C}\backslash\{-d\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $F_2(z) := z + d$. Diese Abbildung ist eine Translation.

(iii) $F_3 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $F_3(z) := \tfrac{1}{z}$. Diese Abbildung ist die Inversion.

(iv) $F_4 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $F_4(z) := -\frac{D}{c}z$. Diese Abbildung ist eine Drehstreckung.

(v) $F_5 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ mit $F_5(z) := z + \frac{a}{c}$. Diese Abbildung ist eine Translation.

Es gilt nun:

$$M(z) = (F_5 \circ F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1)(z),$$

denn der Ausdruck auf der rechten Seite ergibt:

$$\frac{a}{c} - \frac{D}{c}\frac{1}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{a(cz+d)-ad+bc}{c(cz+d)} = \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d}$$

□

Beh. (b): *Für eine Möbiustransformation M mit $z_0, z_1, z_2, z_3 \neq -\frac{d}{c}$ gilt die folgende Gleichung:*

$$\mathrm{DV}(M(z_0), M(z_1), M(z_2), M(z_3)) = \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3). \tag{1}$$

Beweis. Mit Teil (a) reicht es Gleichung 1 für die angegebenen 3 Abbildungen, also Drehstreckung, Translation und die Inversion, zu überprüfen. Sei D eine Drehstreckung, es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathrm{DV}(D(z_0), D(z_1), D(z_2), D(z_3)) &= \frac{(uz_0 - uz_1)(uz_2 - uz_3)}{(uz_0 - uz_3)(uz_2 - uz_1)} \\ &= \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} \\ &= \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3).\end{aligned}$$

Sei nun T eine Translation, dann berechne:

$$\begin{aligned}\mathrm{DV}(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= \frac{((z_0+v)-(z_1+v))((z_2+v)-(z_3+v))}{((z_0+v)-(z_3+v))((z_2+v)-(z_1+v))} \\ &= \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} \\ &= \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3).\end{aligned}$$

Betrachte jetzt noch die Inversion I:

$$\begin{aligned}\mathrm{DV}(I(z_0), I(z_1), I(z_2), I(z_3)) &= \frac{(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3})}{(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_3})(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1})} \\ &= \frac{(\frac{z_1 - z_0}{z_0 z_1})(\frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3})}{(\frac{z_3 - z_0}{z_0 z_3})(\frac{z_1 - z_2}{z_2 z_1})} \\ &= \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} \\ &= \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3).\end{aligned}$$

□