MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Lösung zum Ubungsblatt 4

1. (a) Also ist $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ und wegen der CR-Gleichungen folgt also auch $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ und damit ist auch u lokal konstant und somit auch f.

   (b) Sei $argf = \theta$, dann ist $g = e^{-i\theta}f$ reell-wertig und hat somit imaginäre Teil konstant Null, insbesondere also konstant und damit wie oben ist g und also auch f lokal konstant.

   (c) Es sei $|f| = u^2 + v^2 = c \neq 0$ (da die Behauptung sonst trivialerweise folgt) und damit bekommen wir durch Differenziation nach x, y die Gleichungen

$$uu_x + vv_x = 0;\ uu_y + vv_y = 0$$

   damit folgt aber aus den CR-Gleichungen:

$$uu_x - vu_y = 0;\ uu_y + vu_x = 0$$

   Muliplikation der ersten mit u, der zweiten mit v und Summation der beiden Gleichungen liefert $(u^2 + v^2)u_x = cu_x = 0$ und damit $u_x = 0$. Genauso schliesst man für u_y und somit folgt die lokale Konstanz von u, v und so auch von f.

2. (a) Wie in der Vorlesung finden wir den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{k}}{n} z^n$ zu 1. Damit definiert $W_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{k}}{n}(z-1)^n$ eine analytische Funktion in $D(1,1)$. Auch gilt wie in der Vorlesung $W_k(zw) = W_k(z)W_k(w)$ und $(W_k(z))^k = z$ für alle z, w für die beide Seiten definiert sind. Beides folgt aus dem Identitätssatz dergestalt, dass wir zuerst ein festes reelles $w \in]0,2[$ wählen, dann gilt die Gleichung $W_k(xw) = W_k(x)W_k(w)$ für alle reellen x wie oben wegen der Multiplikationseigenschaft von $\sqrt[k]{.}$. Wegen des Identitätssatzes stimmen die beiden analytischen Funktionen $W_k(zw)$ und $W_k(z)W_k(w)$ in ihrem gemeinsamen Definitionsgebiet überein. Nun halten wir z fest und wissen, dass die beiden analytischen Funktionen oben für reelle w wo die Gleichung Sinn ergibt übereinstimmen (das tuen sie immer auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}$) und damit stimmen sie auch für komplexen w in ihrem gemeinsamen Definitionsgebiets überein. Für die zweite Identität ist es sogar leichter. Wie in der Vorlesung (oder in den Tutorien für *Log*) können wir damit Reihenentwicklungen um andere Punkte in $D(1,1)$ (vorerst) erhalten: Sei $z_0 \in D(1,1)$ dann schreibe $W_k(z_0 + z) = W_k(z_0(1 + \frac{z}{z_0}) = W_k(z_0)W_k(1 + \frac{z}{z_0}) = W_k(z_0)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{k}}{n} \frac{z^n}{z_0^n}$ diese Reihe konvergiert aber für alle z mit $|z| < |z_0|$ damit können wir $W_k(z)$ durch die obige Potenzreihe auf ganz $D(z_0, |z_0|)$ analytisch fortsetzen. Iteriere den Prozess nun. Allerdings wissen wir schon vom Logarithmus, dass wir diesen Prozess nicht beliebig fortsetzen können. Deshalb zeigen wir jetzt die folgende allgemeine Identität: In $D(1,1)$ gilt für alle $\sigma \in \mathbb{C}$ $b_\sigma(z) = e^{\sigma Log(1+z)}$

Bitte wenden!

für Log den Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}^{**}$ und $b_\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma}{n} z^n$ die binomische Reihe. Wegen $n\binom{\sigma}{n} = \sigma\binom{\sigma-1}{n-1}$ folgt gleich

$$b'_\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\sigma}{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma\binom{\sigma-1}{n}z^n = \sigma b_{\sigma-1}(z)$$

Wegen $\binom{\sigma-1}{n} + \binom{\sigma-1}{n-1} = \binom{\sigma}{n}$ für $n \geq 1$ folgt durch Umordnung (innerhalb $|z| < 1$ erlaubt):

$$b_\sigma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\sigma}{n}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\binom{\sigma-1}{n}+\binom{\sigma-1}{n-1})z^n+1 = b_{\sigma-1}(z)+zb_{\sigma-1}(z) = (1+z)b_{\sigma-1}(z)$$

Kombiniert man die beiden Resultate so erhält man

$$b'_\sigma(z) = \frac{\sigma}{1+z}b_\sigma(z)$$

Nun betrachte die Funktion $H(z) = b_\sigma(z)e^{-\sigma Log(z+1)}$ auf $D(1,1)$. Sie ist sicherlich holomorph (als Produkt und Zusammensetzung holomorpher Funktionen), also gilt

$$\frac{dH}{dz} = b'_\sigma(z)e^{-\sigma Log(1+z)} - \sigma b_\sigma(z)e^{-\sigma Log(1+z)}\frac{1}{1+z} =$$

$$= \frac{\sigma b_\sigma(z)}{1+z}e^{-\sigma Log(1+z)} - \frac{\sigma b_\sigma(z)}{1+z}e^{-\sigma Log(1+z)} = 0$$

aber $H(0) = 1$ deshalb gilt die Behauptung

$$b_\sigma(z) = e^{\sigma Log(1+z)}$$

Da aber $W_k(1+z) = B_{\frac{1}{k}}(z)$ in $D(1,1)$ gilt ist $W_k(z) = e^{\frac{1}{k}Log z}$ für alle $z \in D(1,1)$. Mit $(W_k(z))^k = (e^{\frac{1}{k}Log(z)})^k = e^{Log(z)} = z$. Damit sehen wir, dass eine eindeutige analytische Fortsetzung für W_k auf ganz $\mathbb{C}^{**}$ existiert, nämlich $e^{\frac{1}{k}Log(z)}$. Die Unstetigkeit des Hauptzweigs des Logarithmus auf der negativen reellen Achse bestimmt nun auch das Übergangsverhalten von W_k (denken wir uns jetzt als auf ganz $\mathbb{C}^{**}$ definiert) an jedem Punkt der negativen reellen Achse. Sei $x < 0;\ x \in \mathbb{R}$ und h_n^1, h_n^2 zwei Folgen von komplexen Zahlen, so dass $h_n^i \to x$ wenn $n \to \infty$ und $Im h_n^1 > 0;\ Im h_n^2 < 0$ für alle n. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} Log(h_n^1) = log|x| + i\pi;\ \lim_{n\to\infty} Log(h_n^2) = log|x| - i\pi$$

Deshalb ist

$$\lim_{n\to\infty} W_k(h_n^1) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{k}Log(h_n^1)} = e^{\frac{1}{k}(log|x|+i\pi)} = \sqrt[k]{|x|}e^{i\frac{\pi}{k}}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} W_k(h_n^2) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{k}Log(h_n^2)} = e^{\frac{1}{k}(log|x|-i\pi)} = \sqrt[k]{|x|}e^{-i\frac{\pi}{k}}$$

Also unterscheiden sich die beiden Grenzwerte genau um die erste Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ Dies zeigt insbesondere, dass W_k auf keinen Punkt $x \neq 0$ der negativen reellen Achse stetig fortsetzbar ist (Auf Null hingegen schon, da zwar Log nicht definiert ist, aber $e^{\frac{1}{k}Log(h)} \to 0$ für $h \to 0$). Diese Differenz der Grenzwerte gibt auch einen Hinweis auf die anderen $k-1$ möglichen Wurzelfunktionen:

$$W_k^j(z) = e^{j\frac{2\pi i}{k}}W_k(z)$$

W_k^j ist sicherlich analytisch und erfüllt $(W_k^j(z))^k = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^{**}$. Macht man nun, die Limes-berechnung wie oben, für die verschiedenen Wurzelfunktionen (oder Zweige der Wurzelfunktion) so findet man, dass der Limes von unten der (j+1)-ten Wurzelfunktion der Wert des Limes von oben der jten Wurzelfunktion ist. Das suggeriert also das Folgende: Man stelle sich vor, man nehme k-mal die punktierte komplexe Ebene, die zuvor entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten wurden und stapele diese Ebenen übereinander. Nun verklebe man die bisher losen Enden (vom Aufschneiden) so, dass der untere Lappen der (j+1)ten Ebene mit dem oberen Lappen der jten Ebene verklebt wird. Der letzte Lappen ganz oben wird mit dem untersten noch übrigen Lappen verklebt. Auf diesem Raum (der entfernt an einen Radi erinnert) gibt es nun eine wohldefinierte Wurzelfunktion, die sich aus den einzelnen Zweigen W_k^j auf den übereinandergestapelten Blättern wie oben definiert.

3. (a) Eine der gesuchten Funktionen ist $z^3 + 1$

   (b) Eine der gesuchten Funktionen ist $\frac{1}{z}$

   (c) Eine der gesuchten Funktionen ist $\sqrt{z}$ (Hauptzweig).

   (d) Eine solche holomorphe Funktion existiert nicht. Beweis durch Widerspruch: Man nehme an ein solches f existiere, dann ist f' gegeben als Multiplikation mit der komplexen Zahl $u_x - iu_y$ wegen der CR-gleichungen. Damit ist aber $f'(z) = \frac{2}{z}$ (vgl. Teilaufgabe b oben). Nun definiere $g(z) = \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2}f(1)$. g ist holomorph auf $\mathbb{C}^*$ und es gilt $e^{g(z)} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ da $\frac{e^{g(z)}}{z}$ konstant ist (Differenziation!) und $e^{g(1)} = e^0 = 1$ ist. Man kann jetzt $k(z) = e^{\frac{1}{2}g(z)}$ mit $(k(z))^2 = z$ definieren. Nun betrachte für ein $b \in \mathbb{C}^*$ die Funktion $G(z) = \frac{k(z)k(b)}{k(bz)}$. Quadrierien zeigt, dass G gleich ± 1 ist. Wegen der Stetigkeit von G in z, b ist G konstant ± 1 für alle z, b. O.B.d.A nehmen wir an, dass G gleich 1 ist, anderenfalls betrachte die Funktion $-k$, die die gewünschte Eigenschaft besitzt. Also gilt $k(zw) = k(z)k(w)$. Dann gilt aber $-1 = (k(-1))^2 = k(-1)k(-1) = k((-1)(-1)) = k(1) = k(1.1) = k(1)k(1) = (k(1))^2 = 1$ ein Widerspruch.

4. (a) Wir verwenden Übungsaufgabe 2.a auf Blatt 1. Dies ist zwar in der Angabe schon gegeben, wir zeigen aber trotzdem, dass M bijektiv und konform ist:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

dann ist $M^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$ da nicht sowohl a als auch c verschwinden können. Diese Funktion ist auf dem Bild von M holomorph. Ausserdem gilt

$$M'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Zu aller erst bemerken wir, dass die Translationen $T_b : z \mapsto z+b$ Möbiustransformationen sind, die trivialerweise Kreise und Geraden erhalten. Falls also das Bild eines Kreises K unter $M_b = T_{-b}MT_b$ ein Kreis oder eine Gerade ist, so ist auch das Bild von K unter $M = T_bM_bT_{-b}$ ein Kreis oder eine Gerade. Damit dürfen wir annehmen, dass alle unsere Kreise als Mittelpunkt den Ursprung haben. Wir zeigen nun die gewünschte Eigenschaft für alle M^{-1}: Sei K ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit 0 als Mittelpunkt. Also $K = \{w \in \mathbb{C} | |w| = r;\ r \neq 0\}$ aber M^{-1} bildet w auf z ab, so dass $w = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt. Also sind wir an dem geometrischen Ort aller der z interessiert, die

$$\left|\frac{az + b}{cz + d}\right| = r$$

erfüllen (das ist das Bild von K unter M^{-1}). Nun sei zuerst $a, c \neq 0$ dann gilt:

$$\left| \frac{z - (\frac{-b}{a})}{z - (\frac{-d}{c})} \right| = \frac{|c|}{|a|} r$$

und nach der oben genannten Übungsaufgabe beschreibt diese Gleichung einen Kreis für $\frac{|c|}{|a|} r \neq 1$ und die Mittelsenkrechte der Strecke $[\frac{-b}{a}, \frac{-d}{c}]$ für $r = \frac{|a|}{|c|}$. Für $a = 0, c \neq 0$ folgt $M(z) = \frac{b}{cz+d}$ aber

$$\left| \frac{b}{cz+d} \right| = r$$

und damit $|z - (\frac{-d}{c})| = \frac{|b|}{|c| r}$ ist ein Kreis. Andererseits für $c = 0, a \neq 0$ sieht man trivialerweise, dass man einen Kreis erhält. Hätten wir mit M^{-1} anstatt M begonnen, so hätten wir die geforderte Eigenschaft direkt für M gezeigt. Damit also bildet M Kreise auf Kreise oder Geraden ab.

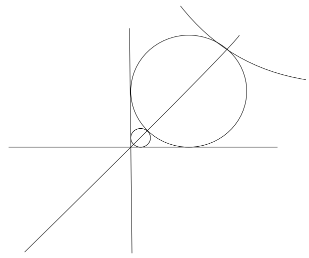
(b) Betrachte die Möbiustransformation

$$M \colon \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} \setminus \{-1\}; \; z \mapsto \frac{-z+1}{z+1}$$

Zuerst bemerke man, dass $M^{-1} = M$ ist. Nun wollen wir zeigen, dass M den Einheitskreis (ohne -1) auf die imaginäre Achse abbildet und die reelle Achse (ohne -1) auf sich selbst. Mit $M^{-1} = M$ folgt sofort, dass dann M auch die imaginäre Achse auf den Einheitskreis und die reelle Achse auf sich abbilden muss. Für die erste Behauptung müssen wir wie oben den geometrischen Ort aller z mit

$$\left| \frac{-z+1}{z+1} \right| = 1$$

finden, es ist $a = -1, c = 1$ und damit kommt eine Gerade heraus, die Mittelsenkrecht zur Strecke $[-1, 1]$, das ist die imaginäre Achse. Für die zweite Behauptung diskutiere man die reelle Funktion $g \colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}; x \mapsto \frac{-x+1}{x+1}$. Sie ist surjektiv und damit folgt die zweite Behauptung (g ist die Einschränkung von M auf die reelle Achse). Für $z = x + iy$ folgt $w = \frac{-z+1}{z+1} = \frac{1}{(x+1)^2+y^2}(1 - x^2 - y^2 - i2y)$. Falls nun $Re w > 0$ gilt also $Re \frac{-z+1}{z+1} > 0$ dann ist $1 - x^2 - y^2 > 0$ was genau heisst, dass $|z| < 1$. Damit bildet also $M^{-1} = M$ die rechte Halbebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{E}$ ab. Es gilt aber auch, dass für $|z| < 1$ $M(z) = w \in \mathbb{H}$ landet. Daraus folgt das M $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{H}$ abbildet. Damit ist $M(K)$ ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{H}$, der sowohl die imaginäre Achse als auch die reelle Achse ber¨hrt. M ist aber konform und erhält also Winkel. Da K tangential zu $\partial \mathbb{E}$ an dem einen Berührpunkt und tangential zur reellen Achse an dem anderen Berhrpunkt ist, muss $M(K)$ tangential zur imaginären Achse und zur reellen Achse an den Berührpunkten sein (Schnittwinkel sind und bleiben Null) und kann deshalb keine Gerade sein!. Ein solcher Kreis muss aber seinen Mittelpunkt auf einer der Winkelhalbierenden haben. Wir suchen also zwei Kreise A', B', die sowohl $M(K)$, die reelle als auch die imaginäre Achse berühren. Ihre Mittelpunkte a', b' liegen also beide auf derselben Winkelhalbierenden W wie der Mittelpunkt von $M(K)$. Der Rest ist nun klar: Fälle das Lot durch die Schnittpunkte von $M(K)$ mit W. Das gibt zwei gleichschenklige Dreiecke (ein grosses und ein kleines). Die Inkreise sind die beiden gesuchten Kreise A', B' (elementare ebene Geometrie zeigt, dass der Berührpunkt des Inkreises mit der durch das Lot definierten



Dreiecksseite wirklich auf W liegt und damit also $M(K)$ berührt).
Zur Konstruktion des Inkreises konstruiert man eine weitere Winkelhalbierende W' in dem (einen) Dreieck. Der Schnittpunkt von W' mit W ist der eine gesuchte Mittelpunkt a' (oder b'). Und damit sind $M(a') = a;\ M(b') = b$ die beiden gesuchten Mittelpunkte von A, B.

5. (a) Wähle eine Parametrisierung der senkrechten Gerade durch $(n, 0)$ der Form $(n + i\frac{s}{2n})$ $s \in]-\infty, \infty[$.

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

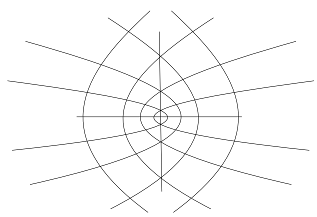
und damit geht $n + i\frac{s}{2n}$ auf

$$n^2 - \frac{s^2}{4n^2} + is$$

Also auf eine nach links-geöffnete Parabel durch n^2 mit Streckungsfaktor $\frac{1}{4n^2}$ und mit der reellen Achse als Symmetrieachse. Andererseits sei $(\frac{s}{2m} + im)$ $s \in]-\infty, \infty[$ eine Parametrisierung der horizontalen Geraden durch im, dann geht $\frac{s}{2m} + im$ nach

$$\frac{s^2}{4m^2} - m^2 + is$$

also eine nach rechts-geöffnete Parabel mit der reellen Achse als Symmetrieachse und



Streckungsfaktor $\frac{1}{4m^2}$.

i. In Aufgabe 4 haben wir mit $\frac{-z+1}{z+1}$ eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{H}$ konstruiert. Nun ist aber $i\mathbb{H}$ die obere Halbebene, da für $z \in \mathbb{H}$, $Rez > 0$. Damit ist $Imiz = Rez > 0$ und iz in der oberen Halbebene. Multiplikation mit der komplexen Zahl i ist sicherlich biholomorph und damit ist

$$f(z) = i\frac{-z+1}{z+1}$$

eine mögliche Lösung.

ii. Für $k = 1$ ist $W_{\frac{\pi}{k}} = OH$ und die Umkehrabbildung der ersten Teilaufgabe eine mögliche biholomorphe Abbildung. Nun sei also $k \geq 2$. Wir setzen die gewünschte biholomorphe Abbildung aus mehreren einfachen zusammen (die Zusammensetzung zweier biholomorpher Abbildungen ist wieder biholomorph). Die Abbildung

$m_a(z) = az$ und $a \in \mathbb{C}^*$ ist trivialerweise biholomorph. Betrachte zuerst $m_{e^{-i\frac{\pi}{2k}}}$. Diese Abb. bildet $W_{\frac{\pi}{k}}$ auf den Keil $K_{\frac{\pi}{2k}}$ ab, wobei $K_\theta = \left\{z \in \mathbb{C}^* | z = re^{i\phi};\ \phi \in]-\theta, \theta[\right\}$ ist. Jetzt betrachten wir die ganzzahlige Potenzfunktion $f_n(z) = z^n$, sie ist für alle n wohl-definiert (im Gegensatz zu rationalen Exponenten zum Beispiel) und beispielsweise gegeben durch $f_n(re^{i\phi}) = r^n e^{in\phi}$. Ihre Ableitung ist $f_k'(z) = kz^{k-1}$ und verschwindet damit nicht auf $\mathbb{C}^*$. f_n ist auf $\mathbb{C}^*$ also konform und der Keil $K_{\frac{\pi}{2k}}$ wird auf den Keil $K_{\frac{n\pi}{2k}}$ abgebildet. Allerdings ist f_n nicht überall umkehrbar, da eine Wurzelfunktion maximal auf einer geschlitzten Ebene wie $\mathbb{C}^{**}$ wohldefiniert ist. Das heit aber f_n ist auf dem Keil $K_{\frac{\pi}{n}}$ umkehrbar, da $f_n(K_{\frac{\pi}{n}}) = \mathbb{C}^{**}$ und hier eine wohldefinierte Umkehrung (siehe Aufgabe 2) existiert. Also bildet f_k $K_{\frac{\pi}{2k}}$ biholomorph auf $\mathbb{H}$ ab. Mittels der Abbildung $M(z) = \frac{-z+1}{z+1}$ aus Aufgabe 2, können wir $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbilden ($M^{-1} = M$). Die Zusammensetzung $\beta = M \circ f_k \circ m_{e^{-i\frac{\pi}{2k}}}$ ist die gesuchte biholomorphe Abbildung.

6. (a) Für $F(z) = \frac{1}{1+z}$ gilt: F ist analytisch in $\mathbb{E}$, da es die Potenzreihen-darstellung

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

in $\mathbb{E}$ hat. Und es gilt

$$F(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

Falls es nun ein analytisches G mit der gleichen Eigenschaft gibt, so verschwindet die analytische Funktion $(F - G)(z)$ auf der Nullfolge $\frac{1}{n}$ (oder hat keine isolierte Nullstelle bei 0) und somit muss $F = G$ nach dem Identitätssatz in ganz $\mathbb{E}$ gelten.

(b) Eine solche Funktion kann nicht einmal holomorph in 0 sein, also kann eine solche analytische Funktion nicht existieren. Betrachte die beiden Folgen $h_n^1 = \frac{1}{2n}$; $h_n^2 = \frac{1}{2n+1}$. Beide gehen gegen Null, wenn $n \to \infty$ geht. Falls ein solches f existierte, müsste es in 0 komplex differenzierbar und erst recht stetig sein. Stetigkeit verlangt nun, dass $f(0) = 0$ gilt. Es ist jetzt aber nicht komplex differenzierbar, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(h_n^1) - f(0)}{h_n^1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$$

hingegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(h_n^2) - f(0)}{h_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}} = -1$$

und damit existiert der Limes nicht!.