Mathematisches Institut
Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
A. Stadelmaier
M. Schwingenheuer

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Lösungen von Übungsblatt 3

1. (a) Man beweise, dass 2π die einzige minimale Periode von $\sin z$ und $\cos z$ ist. Schließen Sie nun auf die Nullstellen von $\sin z$ und $\cos z$.

Lösung: Es ist zunächst sinnvoll, die Funktionen $\sin z$ und $cos z$ für $z = x + i\,y$ in Real- und Imaginärteil aufzuspalten. Dies liefert

$$\sin z = \sin x \cosh y + i\, \cos x \sinh y \tag{1}$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i\, \sin x \sinh y \tag{2}$$

Angenommen z_0 sei eine Periode von $\sin z$, d.h.

$$\sin(z + z_0) = \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{3}$$

bzw.

$$\sin(x + x_0)\cosh(y + y_0) = \sin x \cosh y \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

und

$$\cos(x + x_0)\sinh(y + y_0) = \cos x \sinh y \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Für $x = 0$ folgt aus (4) das $\sin x_0 \cosh(y + y_0) = 0$ und damit $\sin x_0 = 0$. Das ist gleichbedeutend mit

$$x_0 = 0,\, \pm\pi,\, \pm 2\pi, \ldots = k\pi \in \pi\mathbb{Z}\,. \tag{6}$$

Für $x = \pi/2$ folgt aus (4) mit $x_0 = k\pi$ das $\cosh y = (-1)^k \cosh(y + y_0)$ und damit $k \in 2\mathbb{Z}$ und $y_0 = 0$. Daher ist 2π die einzige minimale Periode von $\sin z$. Die selbe Argumentation auf den Imaginärteil von $\cos z$ anwenden liefert das gleiche Ergebnis für $\cos z$.

Da $\sin z = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sinh^2 y = |\sin z|^2 = 0$ und $\sinh^2 y$ jeweils für $y > 0$ und $y < 0$ monoton wachsend ist, folgt $\sin z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ und $x = k\pi \in \pi\mathbb{Z}$. Analog folgt für $\cos z$ mit $|\cos z|^2 = \sin h^2 y + \cos^2 z$, dass $y = 0$ und $x = \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$ die einzigen Nullstellen von $\cos z$ sind.

(b) Man schließe auf die Perioden von $\tan z$ und $\cot z$. Ist $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv?

Lösung: Es ist offensichtlich, dass π eine Periode von $\tan z$ ist. Diese ist im Rellen die minimale Periode. Wie sieht es aber im Komplexen aus? Um diese Frage zu beantworten, schreiben wir $\tan z$ als

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\,. \tag{7}$$

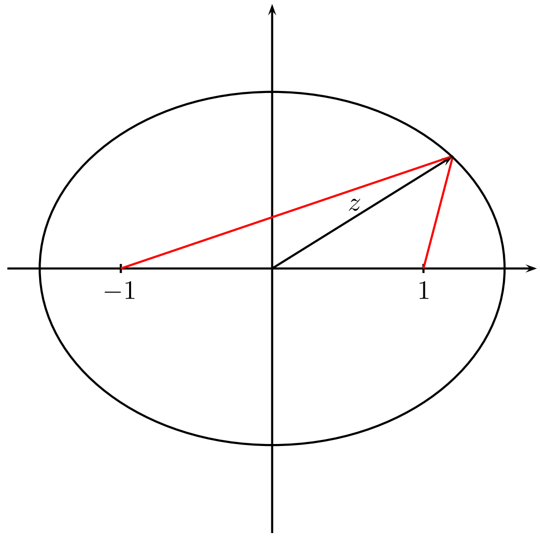

Abbildung 1: Das Bild der Geraden $t + iy_0$ unter sin beschreibt eine Ellipse mit Exzentrizität 1. Die kleine Halbachse hat die Länge $\sinh y_0$ und die große Halbachse die Länge $\cosh y_0$.

Demnach gilt $\tan(z + z_0) = \tan(z)$ genau dann wenn

$$\sin z \cos(z + z_0) = \sin(z + z_0) \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}\,. \tag{8}$$

Setzen wir z.B. $z = 0$, so folgt aus Aufgabe (a), dass $\sin z_0 = 0 \Rightarrow z_0 \in \pi\mathbb{Z}$. Das bedeutet, dass die Menge der Perioden in $\pi\mathbb{Z}$ enthalten ist. Da aber $\tan(z + \pi) = \tan z$, so folgt, dass π auch im Komplexen die minimale Periode von $\tan z$ ist.

Um die Surjektivität von $\sin z$ zu untersuchen, benutzen wir Gleichung (1) und betrachten das Bild der Geraden $t + iy_0$ für beliebig aber festes y_0. Für die Surjektivität reicht es aus, $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ zu behandeln. Damit wird das Bild von $t + iy_0$ unter sin zu

$$\gamma_{y_0}(t) = \begin{pmatrix} \cosh y_0 \sin t \\ \sinh y_0 \cos t \end{pmatrix} \tag{9}$$

Diese Kurve γ_{y_0} beschreibt eine Ellipse mit Exzentrizität 1, da $\cosh^2 y_0 - \sinh^2 y_0 = 1$ und $x(t)$, $y(t)$ folgende Relation erfüllen (vgl. Abb. 1.):

$$\frac{x(t)^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{y(t)^2}{\sinh^2 y_0} = 1 \tag{10}$$

Bekanntermaßen gilt für einen Punkt P auf einer Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 und großer Halbachse a, dass $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. Sei nun z ein Punkt auf der Ellipse, welche durch Gleichung (10) beschrieben wird. Dann gilt

$$\cosh y_0 = \frac{|z-1| + |z+1|}{2}\,. \tag{11}$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen $\pm y_0$, für $y_0 > 0$. Das positive Vorzeichen gilt, falls $\operatorname{Im} z > 0$ und das negative Vorzeichen entsprechend für $\operatorname{Im} z < 0$ (vgl. Gleichung (9)).

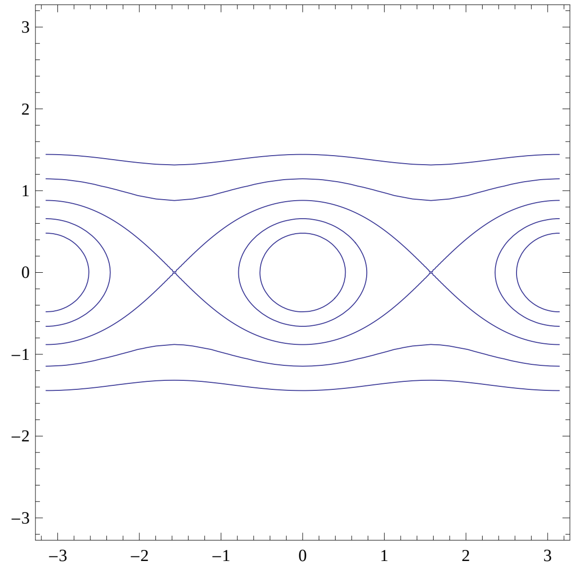

Abbildung 2: Höhenprofil von $|\sin z|^2$.

Ist umgekehrt $z \in \mathbb{C}$ gegeben, so lässt sich mittels Gleichung (11) die (eindeutige) Ellipse bestimmen, auf der z liegt, da y_0 und $-y_0$ die selbe Ellipse beschreiben. Das Vorzeichen kann wieder über den Imaginärteil bestimmt werden. Daher ist die Funktion $\sin z$ surjektiv.

Anmerkung: Wir könnten noch zusätzlich die Injektivität von $\sin z$ nachweisen, solange wir $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$ einschränken. Dies könnten wir über die nichtsingularität der Jacobi Matrix nachweisen. Die Ellipsen (10) beschreiben einen Koordinatenwechsel von den kartesischen Koordinaten (x, y) auf elliptische Koordinaten (ϕ, a). Wir hätten genauso gut das Bild der Geraden $x_0 + it$ betrachten können. Dann wären wir allerdings bei hyperbolischen Koordinaten angelangt.

(c) Berechnen Sie die minimale Periode von $|\sin z|^2$ und weisen Sie nach, dass es die einzige ist.

Lösung: Es gilt

$$\sin \bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i\, \cos x \sinh y = \overline{\sin z} \tag{12}$$

und daher

$$|\sin z|^2 = \sin z \sin \bar{z} \overset{!}{=} \sin(z + z_0) \sin(\bar{z} + \bar{z}_0)\,. \tag{13}$$

Betrachten wir $z = 0$, so folgt, dass $|\sin z_0|^2 = 0$ und damit $\sin z_0 = 0$. Aus Aufgabe (a) wissen wir, dass deshalb $z_0 \in \pi\mathbb{Z}$. Daher ist die Menge der Perioden in $\pi\mathbb{Z}$ enthalten. Da $|\sin(z + \pi)|^2 = |\sin z|^2$ ist π die minimale Periode.

(d) Fertigen Sie ein Höhenprofil von $|\sin z|^2$ an. Zeichnen Sie dazu die Kurven $|\sin z|^2 = c$ für $c = 0.25,\ 0.5,\ 1,\ 2$. Skizzieren Sie weiterhin das Höhenprofil von $|\tan z|^2$.

Lösung: Diagramme 2 und 3 zeigen die gesuchten Höhenprofile.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge der *analytischen* (!) Funktionen über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, den wir mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnen, einen Ring bilden.

Lösung: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und es bezeichne $\mathcal{O}(U)$ die Menge der analytischen Funktionen auf U. Weiterhin sei $f,\ g \in \mathcal{O}(U)$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}(U)$ ein Ring ist, brauchen wir zunächst

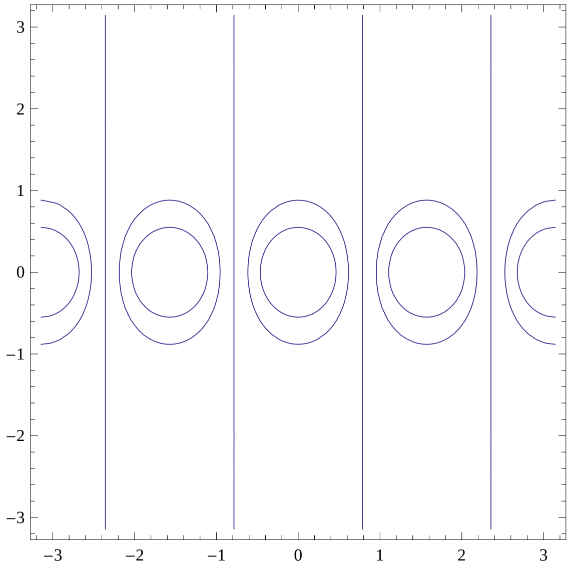

Abbildung 3: Höhenprofil von $|\tan z|^2$. Die Waagerechten zeigen die Kurven $|\tan z|^2 = 1$. Die Kurven, welche um den Ursprung zentriert sind, zeigen die Kurven wachsenden Betrages von Innen nach Außen. Um die Singularität $\pi/2$ wachsen die Beträge von Außen nach Innen.

einmal die zugehörigen Verknüpfungen. Diese definieren wir über die zugehörigen Potenzreihen. Da f, $g \in \mathcal{O}(U)$, gibt es $z_0 \in U$, sodass

$$f(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0) z^n \tag{14}$$

und

$$g(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z_0) z^n \tag{15}$$

für eine Umgebung $V \subseteq U$. Damit können wir die Verknüpfungen auf $\mathcal{O}(U)$ definieren:

$$+ : \mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \qquad (f, g) \longmapsto (f + g) \tag{16}$$

mit

$$(f + g)(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(z_0) + b_n(z_0)) z^n \,, \tag{17}$$

bzw.

$$\cdot : \mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \qquad (f, g) \longmapsto (f \cdot g) \tag{18}$$

mit

$$(f \cdot g)(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(z_0)\, b_{n-k}(z_0) \right) z^n \,. \tag{19}$$

Die Assoziativität, Kommutativität, usw. beider Verknüpfungen vererben sich von $\mathbb{C}\langle T \rangle$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{O}(U)$ unter den Verknüpfungen (17) und (19) abgeschlossen ist. Falls $z_0 \in U$, folgt, dass (14) und (15) im Inneren von $D(0, \rho_f)$ und $D(0, \rho_g)$ (mit

Konvergenzradien ρ_f und ρ_g) konvegieren. Daher konvergieren die beiden Reihen (17) und (19) im Inneren von $D\,(0, \min\{\rho_f, \rho_g\})$ nach Blatt 2 Aufgabe 5.a). Daher lässt sich $f+g$ und $f\cdot g$ lokal um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln. Da z_0 beliebig ist, folgt, dass $f+g$ und $f\cdot g$ analytisch sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(U)$ genau dann frei von Nullteilern ist, wenn U zusammenhängend ist.

Lösung: Sei U zusammenhängend und sei $f\cdot g = 0$ mit $f \neq 0$. Dann gibt es $z_0 \in U$ mit $f(z_0) \neq 0$. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von z_0 mit $f(z) \neq 0$ auf ganz V. Da aber V eine *Umgebung* von z_0 ist, ist V insbesondere zusammenhängend. Daher folgt $g|_V = 0$. Nach dem Identitätssatz folgt dann aber, dass $g = 0$ auf ganz U. Also ist $\mathcal{O}(U)$ frei von Nullteilern, falls U zusammenhängend ist (U zusammenhängend ist hinreichend). Da wir für U nicht zusammenhängend schon Nullteiler in den Präsenzübungen konstruiert haben, folgt sofort die Notwendigkeit der Voraussetzung „U zusammenhängend" und damit die Äquivalenz von U ist zusammenhängend und $\mathcal{O}(U)$ ist nullteilerfrei.

(c) Man gebe ein Beispiel einer nicht zusammenhängenden Menge und zweier Funktionen über dieser Menge an, für welches die Koinzidenzmenge der Funktionen zwar einen Häufungspunkt in U hat, die beiden Funktionen jedoch nicht übereinstimmen. Weiterhin gebe man ein Beispiel eines nicht konvexen Gebiets (genauer: nicht einfach zusammenhängend) und zweier Funktionen an, für das die Koinzidenzmenge einen Häufungspunkt auf dem Rand besitzt und die beiden Funktionen nicht übereinstimmen.

Lösung: Das erste Beispiel lässt sich folgendermaßen konstruieren: Sei $U = U_1 \cup U_2$ mit $U_1 = \{z \in \mathbb{C}\,||z| < 1\}$ und $U_2 = \{z \in \mathbb{C}\,||z-2| < 1\}$. Weiterhin sei $f|_{U_1} \neq 0$, $f|_{U_2} = 0$ und $g = 0$ auf ganz U. Dann ist die Koinzidenzmenge von f und g ganz U_2 und besitzt damit einen Häufungspunkt in U, obwohl $f \neq 0 = g$.

Das zweite Beispiel kann wie folgt angegeben werden: Sei $f(z) = \sin(1/z)$. Für

$$z_n = \frac{1}{n\pi}$$

gilt $\sin(1/z_n) = 0$ obwohl $f \neq 0$. Dieses scheinbare Paradoxon lässt sich auflösen, indem man beobachtet, dass der Häufungspunkt von z_n nicht im *Inneren* des Definitionsbereichs, sondern auf dessen Rand befindet und der Identitätssatz damit nicht anwendbar ist.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f'(z) = 1 + f(z)^2 \tag{20}$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = a_0$. Bestimmen Sie eine Lösung dieses Anfangswertproblems in einer Kreisscheibe um 0 mit dem Potenzreihenansatz. Wie groß kann der Kreis gewählt werden? Hat f eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\,\mathbb{Z})$?

Lösung: Angenommen es existiert eine auf einer Kreisscheibe $U := D(0,\rho)$ analytische Funktion f, die (20) löst. Dann lässt sich f in einem Punkt $z_0 \in U$ entwickeln,

$$f(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,. \tag{21}$$

Es ist

$$f'(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n \tag{22}$$

und

$$f(z_0+z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \right) z^k \tag{23}$$

Einsetzen von (22) und (24) in (20) liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \right) z^n - 1 = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{24}$$

und deshalb

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}\,. \tag{25}$$

Betrachten wir zunächst den Fall $a_0 = 0$. Dann folgt $a_1 = 1$. Sei nun $n \in 2\mathbb{Z}$, d.h. gerade. Gehen wir davon aus, dass jedes a_k mit $k < n$ und k gerade verschwindet. Dann enthält jeder Summand in (25) so ein a_k und verschwindet dadurch. Da a_0 verschwindet, verschwinden dann auch alle a_{2n}. Berechnen wir die ersten Folgeglieder a_n mittels (25), so bekommen wir

$$f(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^5 + \dots \tag{26}$$

Dies ist die Entwicklung des tan bis siebter Ordnung und legt daher nahe, dass $\tan z$ eine Lösung von (20). Und tatsächlich erfüllen sowohl $\tan z$ die DGL (20), als auch dessen Ableitungen die Rekursionsrelation

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, b_{n-k} \tag{27}$$

mit $a_n = b_n/n!$. Dies lässt sich beispielsweise mittels vollständiger Induktion beweisen. Der Konvergenzkreis hat als Radius den Abstand vom Ursprung zur ersten Singularität in der komplexen Ebene, die durch $\pi/2$ gegeben ist. Da sich $\tan z$ im Reellen durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

ausdrücken lässt und sowohl $\sin z$ als auch $\cos z$ in der gesamten komplexen Ebene definiert sind, kann $\tan z$ auf die gesamte komplexe Ebene mit Ausnahme der Nullstellen von $\cos z$, die laut Aufgabe 1 durch $\pi/2 + \pi\mathbb{Z}$ gegeben sind, analytisch fortgesetzt werden. Die übrigen Fälle $a_0 \neq 0$ lassen sich einfach auf den Fall $a_0 = 0$ zurückführen, indem wir beobachten, dass $\tan(z + \arctan a_0)$ für einen beliebigen Ast des Logarithmus (vgl. Aufgabe 5) eine Lösung von (20) mit Anfangsbedingung $f(0) = a_0$ ist. Die Größe der Kreisscheibe ist dann durch die Gleichung $|z + \arctan a_0| < \pi/2$ bestimmt. Es ist jedoch sinnvoller $\tan(z + \arctan a_0)$ mittels der analytischen Fortsetzung von $\tan z$ zu verstehen.

4. (a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k} \tag{28}$$

im Inneren ihres Konvergenzkreises. Berechnen Sie den Konvergenzradius und bestimmen Sie die maximale analytische Fortsetzung der durch die konvergente Potenzreihe gegebenen Funktion.

Lösung: Gegeben sei die Potenzreihe (28). Diese lässt sich schreiben als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (w)^k = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1+z^2} \tag{29}$$

mit $w = -z^2$ und unter Verwendung der geometrischen Reihe. Daher ist es auch unmittelbar klar, dass der Konvergenzradius ρ von (28) $\rho = 1$ erfüllt. Es wurde bewiesen, dass Produkte und Summen analytischer Funktionen wieder analytisch sind. Also ist (29) analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ und ist bereits die maximale analytische Fortsetzung von (29).

(b) Zeige analog: Die Reihe

$$a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \tag{30}$$

konvergiert im offenen Einheitskreis E und erfüllt $a(\tan z) = z$ für alle z, die $\tan z \in E$ genügen. (Hinweis: Analysis I. Daher nennen wir diese Funktion auch arc tan). Man diskutiere die Möglichkeit, a auf größere Gebiete als E analytisch fortzusetzen.

Lösung Berechnen wir zunächst den Konvergenzradius von (30). Da

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

können wir die Quotientenregel verwenden und damit

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^n (2n+3)\right|}{\left|(-1)^{n+1} (2n+1)\right|} = 1 \tag{31}$$

Daher beschreibt $a(z)$ eine auf der Einheitskreisscheibe analytische Funktion. Weiterhin dürfen wir gliedweise differenzieren und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n} = \frac{1}{1+z^2} \,. \tag{32}$$

Wir wissen, dass im reellen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \arctan z = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z \in \mathbb{R}\,.$$

Und deshalb $a(z) = \arctan z + C$ im reellen. Mit $a(0) = 0$ folgt $C = 0$ und deshalb $a(z) = \arctan z$ für $z \in \mathbb{R}$. Daher stimmt $a(z)$ in der Einheitskreisscheibe mit $\arctan z$ überein und lässt sich eindeutig in eine Teilmenge der komplexe Ebene analytisch fortsetzen und es gilt $a(\tan z) = z$ auf dem gesamten Definitionsbereich. Die Diskussion des Definitionsbereichs verschieben wir auf die Lösung von Aufgabe 5.

5. Man diskutiere ausführlich die Gültigkeit der Identität

$$\mathrm{arc}\tan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz} \,. \tag{33}$$

Betrachten Sie zunächst E, dann auch größere, bzw. andere Gebiete (analytische Fortsetzung!). Für welchen (Zweig des) Logarithmus gilt die Identität?

Lösung: Es ist $w = \arctan z$, falls $\tan w = z$, d.h. eine Zahl, die falls man tan auf sie wirkt z liefert. Diese ist schon im reellen nicht eindeutig definiert, da tan periodisch und damit nicht bijektiv ist. Falls man tan auf eine Periode einschränkt, wird er bijektiv und eine Umkehrabbildung existiert auf diesem Intervall. Dadurch wir jedem reellen z eine Zahl zwischen $(k-1)\pi/2$ und $(k+1)\pi/2$ zugeordnet. In der Regel setzt man $k = 0$. Nun wollen wir dieses Verhalten im komplexen untersuchen und genauer verstehen. Dazu werden wir $\tan w$ durch $\exp w$ ausdrücken und die resultierende Gleichung nach w auflösen.

Es gilt

$$\tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{e}^{iw} - \mathrm{e}^{-iw}}{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{iw}} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{e}^{2iw} - 1}{\mathrm{e}^{2iw} + 1} = z \tag{34}$$

Die letzte Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \mathrm{e}^{2iw}\,. \tag{35}$$

Falls wir einen Zweig des Logarithmus auf beide Seiten anwenden, erhalten wir Gleichung (33), bzw.

$$\operatorname{arc}\tan z = \frac{1}{2i}\log_k \frac{1+iz}{1-iz} \tag{36}$$

Hier können wir wieder das gleiche Verhalten wie im Reellen beobachten. Abhängig davon, welchen Zweig wir wählen, erhalten wir eine Zahl, deren Realteil zwischen $(k-1)\pi/2$ und $(k+1)\pi/2$ liegt. Wollen wir die gewohnte Zuordnung auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2[$, die auch durch die Reihenentwicklung (30) gegeben ist, so haben wir den Hauptzweig des Logarithmus zu wählen. Nun wird auch die Frage nach der analytischen Fortsetzung einfach beantwortbar. Diese ist durch die analytische Fortsetzung des Logarithmus eindeutig bestimmt. Daher werden wir alle $z \in \mathbb{C}$ aus dem Definitionsbereich „herausschneiden“, für welche das Argument des Logarithmus auf der negative reelle Achse liegen würde. Das ist gleichbedeutend mit der Lösung von

$$\frac{1+iz}{1-iz} = -x \tag{37}$$

für $x > 0$. Diese Lösung ist gegeben durch

$$z(x) = -i\,\frac{x+1}{x-1}\,, \tag{38}$$

für $x > 0$. Dabei gilt $z([0,1]) = [i, i\infty[=: I_1$ und $z(]1,\infty[) =]-i\infty, -i] =: I_2$. Daher ist $\arctan z$ auf $\mathbb{C} \setminus (I_1 \cup I_2)$ analytisch.

Anmerkung: Auf der Riemannschen Zahlenkugel entspricht die Vereinigung der beiden Intervalle einem Großkreis von i nach -i über den Nordpol. Hätten wir die positive reelle Achse aus dem Definitionsbereich des Logarithmus herausgeschnitten, so würden wir hier als Ergebnis einen Großkreis von 1 nach -1 über den Südpol bekommen, das heißt das Intervall $[-i, i]$.

6. Beweisen Sie folgende Aussagen ohne die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu benützen, nur mit Potenzreihen Methoden:

   (a) Falls eine Polynomfunktion nur reelle oder imaginäre Werte annimmt, muss diese konstant sein.

Lösung: Sei

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\, z^k \tag{39}$$

ein Polynom n-ten Grades, dessen Realteil nur konstante Werte annimmt. Wir werden mittels Induktion beweisen, dass dann das gesamte Polynom konstant sein muss. Zunächst zeigen wir diese Aussage für Polynome vom Grad 1, also lineare Funktionen (Induktionsanfang). Sei dazu $f(z) = a_0 + a_1 z$ mit $a_1 = x_1 + iy_1$ und $z = x + iy$. Dann ist

$$a_1 z = x_1 x - y_1 y + i(x_1 y + y_1 x) \overset{!}{\in} \mathbb{R}\, \forall x,\, y \in \mathbb{R} \tag{40}$$

Angenommen $a_1 \neq 0$, dann gilt $x_1 \neq 0 \vee y_1 \neq 0$. Dies liefert drei Fälle. Angenommen $x_1 \neq 0 \wedge y_1 = 0$, dann ist $x = 0$, $y = 1$ ein Gegenbeispiel zu (40), was einen Widerspruch bedeutet. Falls $x_1 = 0 \wedge y_1 \neq 0$ oder $x_1 \neq 0 \wedge y_1 \neq 0$ ist $x = 1$, $y = 0$ ein Gegenbeispiel zu (40), was auch einen Widerspruch impliziert. Daher muss $a_1 = 0$ gelten und die „lineare“ Funktion ist konstant.

Nehmen wir nun an, es ist wahr, dass ein Polynom n-ten Grades, welches nur reelle Werte annimmt, konstant sein muss (Induktionsannahme).

Sei nun

$$g(z) = f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k\, z^k\,.$$

Da $g(z)$ nur reelle Werte annimmt, gilt das gleiche auch für $g'(z)$ (vgl. Definition der Ableitung). Nun ist aber $g'(z)$ ein Polynom n-ten Grades und nach der Induktionsannahme demnach konstant. Also ist $g'(z) = a_1$. Deshalb ist $g(z)$ eine lineare Funktion, die nur reelle Werte annimmt und nach Induktionsanfang eine Konstante. Da ein Polynom vom Grade 1 konstant sein muss, gilt dies auch für Polynome zweiten Grade. Da es für Polynome zweiten Grades gilt, folgt die Aussage auch für Polynome dritten Grades, ad infinitum (Induktionsschluss). Also ist die Behauptung wahr, dass Komplexe Polynome, die nur reelle Werte annehmen konstant sein müssen. Eine vollkommen analoge Argumentation liefert die Aussage für imaginäre Werte.

(b) Falls der Realteil oder der Imaginärteil einer analytischen Funktion konstant ist, so ist die Funktion konstant.

Lösung: Sei f eine auf einem Gebiet U analytische Funktion. Dann gibt es ein $z_0 \in U$ mit

$$f(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)\, z^n \tag{41}$$

Wir werden z, a_n und damit auch f in Realteil und Imaginärteil zerlegen und zwei bestimmte Mengen betrachten, um zu zeigen, dass die Ableitung von f für alle z_0 verschwindet. Sei nun $z = x + iy$ und $a_n = a_n^1(z_0) + ia_n^2(z_0)$. Zwei Ausdrücke, die in ihrer vollen Tragweite nicht zum Einsatz kommen werden, der Vollständigkeit wegen aber angegeben werden sollen, sind die Aufspaltung von z^n und $f(z)$ in Real- und Imaginärteil. Diese sind gegeben durch[1]

$$\begin{aligned} z^n = (x+iy)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-2k}\, y^k\, i^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k}\, y^{2k}\, (-1)^k + i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1}\, y^{2k+1}\, (-1)^k \end{aligned} \tag{42}$$

[1] Wir wählen die modernere Bezeichnung $\lfloor\ \rfloor$ für die (untere) Gaußklammer, bzw. die Floor Funktion. Die obere Gaußklammer, bzw. Ceil Funktion, wird mit $\lceil\ \rceil$ bezeichnet.

und

$$
\begin{aligned}
&f(z+z_0) = \\
&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n^1(z_0)\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\,x^{n-2k}\,y^{2k}\,(-1)^k - a_n^2(z_0)\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}\,x^{n-2k-1}\,y^{2k+1}\,(-1)^k\right\} \\
&+ i\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n^2(z_0)\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\,x^{n-2k}\,y^{2k}\,(-1)^k + a_n^1(z_0)\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}\,x^{n-2k-1}\,y^{2k+1}\,(-1)^k\right\}
\end{aligned} \tag{43}
$$

Betrachten wir nun den Realteil auf der Geraden $y = 0$. Dann gilt

$$
f(x+x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1(z_0)\,x^n + i\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(z_0)\,x^n \tag{44}
$$

und

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n^1(z_0)\,x^n = const. \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^1(z_0)\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}(z_0)x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{45}
$$

Daher gilt $a_n^1(z_0) = \operatorname{Re} a_n(z_0) = \operatorname{Re} f^{(n)}(z_0) = 0\ \forall n \geq 1$ und demnach insbesondere $\operatorname{Re} f'(z_0) = 0$. Betrachten wir nun die Funktion auf der Geraden $x = 0$. Auf dieser Geraden ist

$$
\operatorname{Re} f(x+x_0) = a_0^1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}^2\,y^{2n+1}\,(-1)^n \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} f(x+x_0) = 0 \tag{46}
$$

und in Analogie zu oben $a_{2n+1}^2(z_0) = \operatorname{Im} f^{(2n+1)}(z_0)\ \forall n \geq 0$. Insbesondere gilt $\operatorname{Im} f'(z_0) = 0$ und damit $f'(z_0) = 0$. Da f analytisch ist in U, können wir aber $f(z)$ um jedes $z_0 \in U$ entwickeln und obige Argumentation anwenden, woraus $f'(z_0) = 0\ \forall z_0 \in U$ folgt. Das bedeutet, dass f lokal konstant ist. Eine vollkommen analoge Argumentation liefert, dass eine analytische Funktion, deren Imaginärteil (lokal) konstant ist, selbst lokal konstant sein muss.

Disclaimer Diese Lösungen sind als Lösungsskizzen zu verstehen und erheben nicht den Anspruch auf Fehlerfreiheit.