Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie

Lösungen zu Übungsblatt 2

1. Konvergenzradien:

Beh. (a): *Der Konvergenzradius von* $\sum (2T)^{n!}$ *ist* $\frac{1}{2}$.

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n\geq 0}(2T)^{n!} = \sum_{n\geq 0} 2^{n!}T^{n!} = \sum_{\substack{k=n!\\ n\geq 0}} 2^k T^k \ ,$$

also

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^{n!}} = 2 \ .$$

□

Beh. (b): *Der Konvergenzradius von* $\sum a_n T^n$, *wobei* $\left\{\begin{array}{lcl} a_{2n} & = & c^n d^n \\ a_{2n+1} & = & 2c^n d^{n+1} \end{array}\right\}$ *gilt für* $0 < c < d$ *und* $c, d \in \mathbb{R}$, *ist* $\frac{1}{\sqrt{cd}}$.

Beweis. Ist $2d > 1$ so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(cd)^n 2d} = \sqrt{cd} \ ,$$

für $2d \leq 1$ gilt ebenso

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(cd)^n} = \sqrt{cd} \ .$$

□

Beh. (c): *Der Konvergenzradius von* $\sum \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n} T^n$ *ist* 2.

Beweis. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n}} = \frac{1}{2} \ .$$

□

2. Dirichletreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$:

Beh. (a): *Die Reihe konvergiert in $\{Re\ z > 0\}$ lokal gleichmäßig, aber nicht normal.*

Beweis. Sei $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$. Sei $z \in G_0$. Schreibe $z = s + it$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Nun existieren $\tau > \rho > 0$ so daß $D(z, \rho) \subset G_0$ und $\rho < \tau < s$. Wir wollen das Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz in $D(z, \rho)$ anwenden. Sei dazu $w \in D(z, \rho)$ mit $w = v + u$, wobei $u := s - \tau + it$ und betrachte die Partialsumme:

$$S(n,m) := \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k^w} = \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k^u} \frac{1}{k^v}$$

Sei weiterhin

$$A(n,m) := \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k^u}$$

Da $s - \tau > 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^u}$ und wir können für vorgegebenes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so daß $|A(n,m)| \leq \epsilon$ für $m > n \geq N$. Mittels Abelscher partieller Summation erhalten wir:

$$S(n,m) := \left(\sum_{k=n}^{m-1} A(n,k)(k^{-v} - (k+1)^{-v}) \right) + A(n,m)m^{-v}$$

Damit gilt:

$$|S(n,m)| \leq \epsilon \left(1 + \sum_{k=n}^{m-1} \left| k^{-v} - (k+1)^{-v} \right| \right)$$

Mit der Abschätzung

$$|n^{-z} - m^{-z}| \leq \left| \frac{z}{s} \right| |n^{-s} - m^{-s}|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ und } z = s + \mathrm{i}t$$

haben wir also

$$|S(n,m)| \leq \epsilon \left(1 + \frac{|v|}{(\text{Re } v)} |n^{-(\text{Re } v)} - m^{-(\text{Re } v)}| \right).$$

Da nun Re $v > \tau - \rho$ und $|v| < \tau + \rho$ sind gibt es $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|S(n,m)| \leq \epsilon C$$

gilt. Damit konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig in $D(z, \rho)$.

Die Reihe konvergiert nicht normal in G_0, da sie im Bereich $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \geq \text{Re } z > 0\}$ nicht absolut konvergiert, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist divergent. □

Beh. (b): *Die Reihe konvergiert in $\{Re\ z > 1\}$ normal.*

Beweis. Wie im Beweis zu **(a)** definieren wir: sei $G_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 1\}$. Sei $z \in G_1$. Schreibe $z = s + it$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Nun existiert $\rho > 0$ so daß $D(z, \rho) \subset G_1$ und $\rho < s$. Sei $w \in D(z, \rho)$ mit $w = v + z$. Wir berechnen

$$\left\| \frac{(-1)^n}{n^w} \right\|_D \leq \frac{1}{n^{(s-\rho)}}$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(s-\rho)}}$ konvergiert, da $s - \rho > 1$. □

3. Sei $r > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Beh. (a): $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \frac{1}{r}$

Beweis. Wir beschränken uns darauf, daß der limes superior existiert, denn sonst ist die Behauptung korrekt, da $r \geq 0$. Sei also

$$S := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Das heißt für ein $\epsilon > 0$:

$$\epsilon + S > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \quad \forall\, n \text{ bis auf endlich viele}$$

Sei $\alpha > S$. Nun existiert $C > 0$, so daß

$$|a_n| < \alpha^n C, \quad \forall\, n \text{ bis auf endlich viele.}$$

Sei nun $0 < \rho < \frac{1}{\alpha}$. Für alle bis auf endlich viele Reihenglieder gilt nun:

$$|a_n|\rho^n < C\alpha^n\rho^n$$

Da $\alpha\rho < 1$ ist nun $(a_n\rho^n)$ eine Nullfolge und somit gilt für den Konvergenzradius

$$r \geq \frac{1}{\alpha}$$

Da α beliebig nahe an S gewählt werden kann also

$$r \geq \frac{1}{S}$$

□

Beh. (b): $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{r}$

Beweis. Zuerst nehmen wir an, daß der limes inferior existiert. Sei also

$$B := \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Das heißt für ein $\epsilon > 0$:

$$B - \epsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \quad \forall\, n \text{ bis auf endlich viele}$$

Sei $0 < \alpha < B$. Nun existiert $C > 0$, so daß

$$|a_n| > \alpha^n C, \quad \forall\, n \text{ bis auf endlich viele.}$$

Sei nun $\frac{1}{\alpha} < \rho$. Für alle bis auf endlich viele Reihenglieder gilt nun:

$$|a_n|\rho^n > C\alpha^n\rho^n$$

Da $\alpha\rho > 1$ ist nun $(a_n\rho^n)$ unbeschränkt und somit gilt für den Konvergenzradius

$$r \leq \frac{1}{\alpha}$$

Da α beliebig nahe an B gewählt werden kann folgt

$$r \leq \frac{1}{B}$$

Falls nun

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$$

gilt, so zeigen obenstehende Abschätzungen, daß die Folge $(a_n \rho^n)$ für beliebig kleine ρ unbeschränkt ist, also für den Konvergenzradius $r = 0$ gilt. $\square$

Für Teil **(c)** nehmen wir die Reihe aus Aufgabe **1.(b)**. Es gilt $r = \frac{1}{\sqrt{cd}}$.

Beh. (c): *Es gilt* $\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2d$ *und* $\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}c$. *Da* $2d > \sqrt{cd} > \frac{1}{2}c$ *ist gilt also keine Gleichheit in den Ungleichungen* 3.a *und* 3.b.

Beweis. Betrachte die Quotienten $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ sowohl für gerade als auch ungerade n:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2c^k d^{k+1}}{c^k d^k} = 2d \ , \qquad \text{für } n = 2k$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{c^{k+1} d^{k+1}}{2c^k d^{k+1}} = \frac{1}{2}c \ , \qquad \text{für } n = 2k+1$$

Da nach Vorraussetzung $d > c$ war folgt die Behauptung. $\square$

4. Gegeben war der Ausdruck $f(z) = \int_1^\infty t^{-(z+1)} b(t)\, \mathrm{d}t$ mit $b(t) := t - [t] - \frac{1}{2}$.

   Beh.: *Das Integral definiert eine analytische Funktion* $f : \{\mathrm{Re}\ z > 0\} \to \mathbb{C}$.

   Beweis. Zuerst zeigen wir die Existenz des Integrals auf der rechten Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z > 0\}$: Sei $z \in H$ mit $z = s + it$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Definiere:

$$f_r(z) = \int_1^r t^{-(z+1)} b(t)\, \mathrm{d}t \quad , r \in \mathbb{R}, r > 1$$

Für $b(t)$ gilt die Abschätzung:

$$|b(t)| \leq \frac{1}{2}$$

Damit erhalten wir:

$$\lim_{r\to\infty} |f_r(z)| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2} \int_1^r \left| t^{-(z+1)} \right| \mathrm{d}t \leq \lim_{r\to\infty} \int_1^r t^{-(s+1)}\, \mathrm{d}t < \infty$$

Das uneigentliche Integral existiert also für alle $z \in H$. Sei nun $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Die Funktionenfolge $f_m(z)$ konvergiert dort auch lokal gleichmäßig: Es existiert ein $\rho > 0$, so daß $D(z, \rho) \subset H$ und $\rho < s$. Wir wollen das Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz in $D(z, \rho)$ anwenden. Sei dazu $w \in D(z, \rho)$ und $\epsilon > 0$. Nun gilt:

$$\left| t^{-(w+1)} \right| \leq t^{-(s-\rho+1)} \tag{1}$$

Da der Grenzwert von $f_m(z)$ für $m \to \infty$ existiert, $\exists N \in \mathbb{N}$ so daß für $n > m > N$ gilt:

$$\int_m^n t^{-(s-\rho+1)}\, \mathrm{d}t < \epsilon$$

Mit Abschätzung 1 gilt nun

$$|f_n(w) - f_m(w)| < \epsilon \quad , \forall\ w \in D(z, \rho).$$

Um die Analytizität zu beweisen, zeigen wir daß die f_m analytisch sind und wenden dann den Weierstrass'schen Doppelreihensatz an. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und integriere partiell:

$$\begin{aligned} h_n(z) := \int_n^{n+1} t^{-(z+1)} b(t)\,\mathrm{d}t &= \int_n^{n+1} t^{-(z+1)} \left(t - n - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_n^{n+1} \frac{t^{-z}}{z}\,\mathrm{d}t + \left(-\frac{t^{-z}}{z}\left(t - n - \frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_n^{n+1} \\ &= \frac{n^{-(z-1)} - (n+1)^{-(z-1)}}{z(z-1)} - \frac{(n+1)^{-z} + n^{-z}}{2z} \end{aligned}$$

Da $n^{-z} = \exp(-z\log(n))$ gilt sind die Zähler der beiden Brüche jeweils analytische Funktionen in z, die exp-Reihe hat Konvergenzradius unendlich. Die Funktion z^{-1} ist ebenfalls analytisch in H, am Punkt z_0 besitzt die entsprechende Reihe Konvergenzradius s_0 (Es sei wieder $z_0 = s_0 + \mathrm{i}t_0$ mit $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$). Nun zu $(z-1)^{-1}$: Diese Funktion hat bei $z = 1$ einen Pol 1. Ordnung. Betrachten wir nun den Ausdruck $g(z) := n^{-(z-1)} - (n+1)^{-(z-1)}$ an der Stelle $z = 1$: Es gilt $g(1) = 0$. Wenn wir $g(z)$ also in eine Potenzreihe um $z = 1$ entwickeln, so ist der Koeffizient a_0 der Reihe gleich null, d.h. man kann den Faktor $(z-1)$ aus der Reihe ausklammern. Der Grenzwert

$$\lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z-1} = 1$$

existiert und damit ist $g(z)(z-1)^{-1}$ analytisch auch im Punkt $z = 1$. Insgesamt haben wir also gezeigt, daß $h_n(z)$ am Punkt z_0 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius s_0 entwickelbar ist. Wir haben

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{m} h_n(z)$$

dargestellt als Summe von Potenzreihen mit Konvergenzradius s_0 am Punkt z_0. Mit dem folgenden Satz sind wir fertig.

Satz (Weierstrass (1841)). *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(z)$ eine Reihe von analytischen Funktionen, von denen jede mit Konvergenzradius mindestens r am Punkt z_0 entwickelbar ist. Konvergiert nun die Reihe gleichmäßig in $D(z_0, \rho)$ für alle $\rho < r$, so ist die Grenzfunktion wieder analytisch mit demselben Konvergenzradius am Punkt z_0.*

Beweis. Dieser Satz wird später in der Vorlesung präsentiert, dort allerdings mit anderen Methoden bewiesen. Hier wollen wir die Aussage nur mit Potenzreihenmethoden beweisen. Für die volle Punktzahl der Aufgabe war es nicht erforderlich diesen Beweis komplett auszuführen.

Sei $\rho < r$, $j \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ fest gewählt. Bezeichne $f_m(z)$ wieder die Partialsummen. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > m > N$ und alle $z \in D(z_0, \rho)$ folgendes gilt

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon' = \epsilon\rho^j \ .$$

Die Funktion $f_n(z) - f_m(z)$ ist eine Potenzreihe und für den j-ten Koeffizienten b_j gilt

$$b_j = \sum_{i=m+1}^{n} a_{ji} \ ,$$

wenn a_{ji} der j-te Koeffizient der i-ten Reihe ist. Für diesen Koeffizienten b_j gilt nun die folgende Abschätzung:

$$|b_j| \leq \frac{\epsilon'}{\rho^j} = \epsilon$$

Damit ist nun die Reihe $c_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}$ konvergent.

Als nächsten Schritt überlege man sich daß die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \ , \text{ für } z \in D(z_0, r)$$

konvergiert. Dazu verwendet man die Ungleichung $|f_n(z)| \leq M + \epsilon'$ für alle $n > N$ innerhalb von $D(z_0, \rho)$, wobei M das Maximum von $|f_{N+1}|$ entlang des Randes von $D(z_0, \rho)$ darstellt. Dazu beachte man, daß $|f_{N+1}|$ entlang des Randes stetig ist. Damit ist nun

$$|c_j| \leq \frac{M + \epsilon'}{\rho^j}$$

und die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ konvergiert in $D(z_0, r)$, da ρ beliebig nahe an r gewählt werden kann.

Im letzten Schritt müssen wir nun noch zeigen, daß die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ als Funktion identisch mit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(z)$ ist. Sei noch $\rho' < \rho$ und wieder $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > m > N$ und alle $z \in D(z_0, \rho)$ folgendes gilt

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon' = \epsilon \, \frac{\rho - \rho'}{\rho} \ .$$

Wir hatten für alle j die Abschätzung

$$\left| c_j - \sum_{i=0}^{n} a_{ji} \right| \leq \frac{\epsilon'}{\rho^j}$$

Dieser abgeschätzte Wert ist der j-te Koeffizient der Entwicklung von

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \right) - \left(\sum_{k=0}^{n} h_k(z) \right)$$

Nun gilt für $z \in D(z_0, \rho')$:

$$\left| \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \right) - \left(\sum_{k=0}^{n} h_k(z) \right) \right| \leq \epsilon' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^j = \epsilon' \, \frac{\rho}{\rho - \rho'} = \epsilon$$

Damit sind die Funktionen gleich innerhalb $D(z_0, \rho')$. Da ρ und ρ' beliebig nahe an r gewählt werden können sind wir fertig. $\square$

Also definiert $f(z)$ auf H eine analytische Funktion. $\square$

5. Sei $\mathbb{C}[\![T]\!]$ die Menge der formalen Potenzreihen mit der Teilmenge $\mathbb{C}\langle T\rangle$ der konvergenten Potenzreihen.

Beh. (a): *Die Menge $\mathbb{C}[\![T]\!]$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.*

Beweis. Die Addition auf der Menge der formalen Potenzreihen ist erklärt durch die Addition von Koeffizienten mit gleichem Index. Das Nullelement ist die Potenzreihe, für die alle Koeffizienten gleich null sind. Das additive inverse Element einer Potenzreihe mit Koeffizienten a_n besitzt die Koeffizienten $-a_n$.

Die Multiplikation ist erklärt über das Cauchy-Produkt von Potenzreihen:

$$\left(\sum a_n T^n\right)\left(\sum b_n T^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) T^n$$

Die Koeffizienten der resultierenden Reihe entstehen aus endlichen Summen, also ist das Ergebnis wieder eine formale Potenzreihe. Das Einselement ist die Potenzreihe mit den Koeffizienten $a_0 = 1$ und $a_n = 0\ \forall\ n \geq 1$.

Die Multiplikation ist kommutativ, denn die Multiplikation und die Addition in $\mathbb{C}$ sind kommutativ. Nach Umindizieren sieht man:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) T^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}\right) T^n$$

□

Beh. (b): *Der Ring $\mathbb{C}[\![T]\!]$ ist ein Integritätsring.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß der Ring nullteilerfrei ist. Seien also zwei Potenzreihen gegeben, so daß

$$\left(\sum a_n T^n\right)\left(\sum b_n T^n\right) = 0$$

Nach Definition gilt also

$$\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = 0\ ,\forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun o.E. $\sum a_n T^n \neq 0$. Wir müssen zeigen, daß $\sum b_n T^n = 0$ gilt. Dazu zeigen wir:

$$[b_0 \ldots b_{n-1} = 0 \Longrightarrow b_n = 0\ ]\,,\forall\ n \in \mathbb{N}$$

Sei l der erste Index für den $a_l \neq 0$ gilt.

$$\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} = a_l b_0 = 0$$

Also ist $b_0 = 0$. Seien nun $b_0 \ldots b_{n-1} = 0$. Mit

$$\sum_{k=0}^{l+n} a_k b_{l+n-k} = a_l b_n = 0$$

folgt nun auch $b_n = 0$. □

Beh. (c): *Die Menge $\mathbb{C}\langle T\rangle$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}[\![T]\!]$.*

Beweis. Hierfür ist noch zu zeigen, daß die Summe sowie das Produkt von zwei konvergenten Potenzreihen wieder eine konvergente Potenzreihe ist.

Betrachte nun zwei konvergente Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 und r_2. Die Summe konvergiert innerhalb des Radius $r = \min\{r_1, r_2\}$, denn innerhalb des kleineren Konvergenzradius konvergieren beide Reihen, also auch die Summe. Das Produkt konvergiert ebenfalls innerhalb des Radius $r = \min\{r_1, r_2\}$, denn innerhalb des kleineren Konvergenzradius konvergieren beide Reihen absolut, d.h. es gilt der große Umordnungssatz und damit konvergiert das Cauchyprodukt absolut mit dem gleichen Grenzwert. □

6. Sei R ein Integritätsring. Definiere $M := R \times (R\backslash\{0\})$ und eine Äquivalenzrelation $(a,b) \sim (c,d) :\Longleftrightarrow ad = cb$ und setze $Q := M/\sim$. Nun ist Q der Quotientenkörper von R.

Beh. (a): *Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ ist isomorph zum Körper der formalen Laurentreihen.*

Beweis. Zuerst überlegen wir uns welche Potenzreihen in $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ bereits invertiert werden können.

Beh.: *In $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ sind genau diejenigen Potenzreihen $\sum a_n T^n$ invertierbar für die $a_0 \neq 0$ gilt.*

Beweis. Für das Inverse $\sum b_n T^n$ einer Potenzreihe muß nach Definition gelten:

$$\left(\sum a_n T^n\right)\left(\sum b_n T^n\right) = 1$$

Nach Definition des Produktes gilt:

$$\left(\sum a_n T^n\right)\left(\sum b_n T^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) T^n$$

Es muß also gelten:

$$a_0 b_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad b_0 = \frac{1}{a_0}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > 0$$

Diese Gleichungen definieren nun rekursiv alle Koeffizienten b_n und nach Konstruktion ist die Potenzreihe mit diesen Koeffizienten die Inverse.

Gilt andererseits $a_0 = 0$, so kann die Gleichung

$$a_0 b_0 = 1$$

nicht erfüllt werden und die Reihe kann in $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ nicht invertiert werden. □

Die Addition und die Multiplikation auf einem Quotientenkörper $Q(R)$ sind für Repräsentanten (a,b) und (c,d) folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) &:= (ad + bc, bd)\\ (a,b)(c,d) &:= (ac, bd)\end{aligned}$$

Es ist wahr, daß diese Operation wohldefiniert sind und $Q(R)$ zu einem Körper machen, wobei das neutrale Element der Addition durch $[(0,1)]$, das neutrale Element der Multiplikation durch $[(1,1)]$, die additive Inverse von $[(a,b)]$ durch $[(-a,-b)]$ sowie die multiplikative Inverse von $[(a,b)] \neq [(0,1)]$ durch $[(b,a)]$ gegeben ist.

Bezeichne $\mathbb{L}$ die Menge der formalen Laurentreihen und $Q(\mathbb{C}[\![T]\!])$ den Quotientenkörper von $\mathbb{C}[\![T]\!]$. Für eine Laurentreihe sei $m \in \mathbb{Z}$ der kleinste Index für den $a_m \neq 0$ gilt. Die Multiplikation und Addition auf $\mathbb{L}$ wird analog zu den Potenzreihen definiert und genauso folgt die Abgeschlossenheit bezüglich dieser Operationen. Um die Isomorphie zu beweisen definieren wir folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{L} &\longrightarrow Q(\mathbb{C}[\![T]\!]) \\ \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n &\longmapsto \begin{cases} [(T^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n, T^{-m})] & \text{falls } m < 0, \\ [(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n, 1)] & \text{falls } m \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Um in den folgenden Rechnungen keine Fallunterscheidungen ausführen zu müssen definieren wir für die Ausdrücke T^k in beiden Einträgen der Äquivalenzklassen des Quotientenkörpers: $T^k := 1$ falls $k \leq 0$. Dies ist im Sinne der Definition von ϕ. Sei im folgenden $m \leq l$. Zunächst zeigen wir daß ϕ ein Homomorphismus ist, dazu zuerst die Addition:

$$\begin{aligned} \phi\left(\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right) + \left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n\right)\right) &= \left[\left(T^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n) T^n, T^{-m}\right)\right] \\ &= \left[\left(T^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n, T^{-m}\right)\right] + \left[\left(T^{-m} \sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n, T^{-m}\right)\right] \\ &= \left[\left(T^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n, T^{-m}\right)\right] + \left[\left(T^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n, T^{-l}\right)\right] \\ &= \phi\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right) + \phi\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n\right) \end{aligned}$$

Nun zur Multiplikation:

$$\begin{aligned} \phi\left(\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n\right)\right) &= \left[\left(T^{-m}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n\right), T^{-m}\right)\right] \\ &= \left[\left(\left(T^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right)\left(T^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n\right), T^{-m}\, T^{-l}\right)\right] \\ &= \left[\left(T^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n, T^{-m}\right)\right]\left[\left(T^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n, T^{-l}\right)\right] \\ &= \phi\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right)\phi\left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n\right) \end{aligned}$$

Der Homomorphismus ϕ ist injektiv, denn aus

$$\phi\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n\right) = [(0,1)]$$

folgt direkt, daß alle $a_n = 0$ sind. Sei nun l und m wieder unabhängig und beide ≥ 0.

Der Homomorphismus ist auch surjektiv. Denn sei

$$q := \left[\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n \right), \left(\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n \right) \right] \in Q(\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!])$$

mit $\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n \neq 0$. Deswegen kann man folgendes schreiben

$$\sum_{n=l}^{\infty} b_n T^n = T^l \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n, \quad c_0 \neq 0$$

Die entstandene Reihe mit $c_0 \neq 0$ kann invertiert werden und wir haben:

$$q = \left[\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n \right)^{-1}, T^l \right] = \phi \left(T^{-l} \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n \right)^{-1} \right)$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Beh. (b): *Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\langle \mathrm{T} \rangle$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen.*

Beweis. Wie in Teil **(a)** untersuchen wir zuerst welche konvergenten Potenzreihen invertierbar sind.

Beh.: *In $\mathbb{C}\langle \mathrm{T} \rangle$ sind genau diejenigen Potenzreihen $\sum a_n T^n$ invertierbar für die $a_0 \neq 0$ gilt.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst formal die Inverse wie in Aufgabe **6.(a)**. Jetzt muß man aber noch zeigen, daß die konstruierte Inverse auch konvergiert. Sei nun eine konvergente Potenzreihe $\sum a_n T^n$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Koeffizientenfolge $(a_n)_n$ beschränkt ist: ist $f(z_0) := \sum a_n z_0^n$ konvergent mit $|z_0| > 0$, so ist $(|a_n||z_0|)_n$ beschränkt und

$$\bar{f}(w) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z_0^n) \left(\frac{z}{z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z), \quad \text{mit } w := \frac{z}{z_0}$$

Sei weiter o.E. $a_0 = 1$ (Multiplikation mit konstantem Faktor). Mit der Beschränktheit gelte also $|a_n| \leq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Man kann außerdem $a > 1$ annehmen. Die oben konstruierte Inverse habe Koeffizienten b_n. Nach Konstruktion gilt:

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Wir wollen nun folgendes zeigen: Es existiert ein $C > 1$ so daß

$$|b_n| \leq (Ca)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Mit dieser Abschätzung geben wir eine positive untere Schranke an den Konvergenzradius an, d.h. die invertierte Potenzreihe konvergiert.

Wir beweisen die Abschätzung mittels Induktion nach n. Für b_0 ist die Ungleichung nach Konstruktion der Inversen erfüllt. Gelte nun die Aussage für n. Wähle $C \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$C > \frac{a}{a-1}$$

Damit gilt

$$|b_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \leq a \sum_{k=1}^{n+1} (Ca)^{n+1-k} \leq aC^n \sum_{k=0}^{n} a^k \leq aC^n \frac{a^{n+1}}{a-1} \leq (aC)^{n+1}$$

und wir haben obige Abschätzung gezeigt. $\square$

Man geht nun genau wie in Teil **(a)** der Aufgabe vor. Zusätzlich muss man sich noch überlegen, daß die Multiplikation und Addition von konvergenten Laurentreihen wieder konvergente Laurentreihen liefern. Für die Addition ist dies klar, da man nur den Potenzreihenanteil untersuchen muß. Für die Multiplikation multipliziere man die beiden Laurentreihen mit den passenden Potenzen von T, so daß man konvergente Potenzreihen hat. Dann kann man wie in Aufgabe **5 (c)** argumentieren und erhält die Konvergenz der multiplizierten Reihen. Das bedeutet, daß das Produkt der Laurentreihen auch konvergiert innerhalb eines gewissen Radius, nur nicht im Punkt 0. Mit der Abbildung ϕ erhält man die Isomorphie wie vorher. $\square$