Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Lösung zum Ubungsblatt 13

1. Wir wissen bereits, dass ϕ eine Bijektion ist. Es bleibt also zu zeigen, dass sowohl ϕ als auch ϕ^{-1} stetig bezüglich der angegebenen Topologien sind. Hierzu betrachten wir eine Folge $(e^{i\theta_n}, a_n) \in \partial\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ mit $e^{i\theta_n}, a_n \to e^{i\theta}, a$ in der gewöhnlichen Topologie von $\mathbb{C}^2$. Wir wollen nun also zuerst zeigen, dass $\phi(e^{i\theta_n}, a_n)$ kompakt gegen $\phi(e^{i\theta}, a)$ konvergiert. Dazu bemerken wir zuerst, dass jede kompakte Teilemenge K Untermenge einer kompakten Teilmenge der Form $\overline{D(0,r)}$ mit $r < 1$ ist. Wir betrachten nun die folgende Abschätzung für $|z| < r$:

$$|\phi(e^{i\theta_n}, a_n)(z) - \phi(e^{i\theta}, a)(z)| = |e^{i\theta_n}\frac{z-a_n}{\bar{a_n}z-1} - e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}| \leq$$

$$|e^{i\theta_n}||\left(\frac{z-a_n}{\bar{a_n}z-1} - \frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right)|+|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}||(e^{i\theta_n} - e^{i\theta})| \leq |\left(\frac{z-a_n}{\bar{a_n}z-1} - \frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right)|+|(e^{i\theta_n} - e^{i\theta})|$$

so können wir das Problem auf die Stetigkeit in den beiden einzelnen Koordinaten reduzieren. Für die ersten Koordinate ist nichts mehr zu zeigen. Zur zweiten betrachten wir $r = 1 - \frac{1}{n}$:

$$|\left(\frac{z-a_n}{\bar{a_n}z-1} - \frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right)| = |\frac{(z-a)(\bar{b}z-1)-(\bar{a}z-1)(z-b)}{(\bar{a}z-1)(\bar{b}z-1)}| \leq \frac{4}{n^2}|a-b|$$

Damit folgt die Stetigkeit von ϕ.
Zur Stetigkeit von ϕ^{-1} beachte, dass für ein beliebiges $f \in Aut(\mathbb{E})$ gilt $f(0) = e^{i\theta}a$ wenn $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. Es bezeichne $\psi_b(z) = \frac{z-b}{\bar{b}z-1}$ ($\psi_b \in Aut(\mathbb{E})$). Nun sei also eine kompakt konvergente Folge $f_n \to f$ in $Aut(\mathbb{E})$ gegeben, dann gilt punktweise Konvergenz: $f_n(0) = e^{i\theta_n}a_n \to f(0) = e^{i\theta}a$ wenn $\phi^{-1}(f_n) = (e^{i\theta_n}, a_n)$ wenn also gilt $f_n(z) = e^{i\theta}\frac{z-a_n}{\bar{a_n}z-1}$. Wir betrachten nun die Folge $\psi_{f_n(0)} \circ f_n$. Alle Elemente dieser Folge erhalten den Nullpunkt und sind somit reine Rotationen mit dem Winkel θ_n(eine kurze Rechnung zeigt dies). Aber

$$\psi_{f_n(0)} \circ f_n \to \psi_{f(0)} \circ f$$

kompakt da $f_n(0) \to f(0)$ und somit konvergiert $e^{i\theta_n} \to e^{i\theta}$. Wegen $e^{i\theta_n}a_n \to e^{i\theta}a$ folgt somit aber auch die Konvergenz von $a_n \to a$. Dies zeigt die Stetigkeit von ϕ^{-1}. Zur Differenzierbarkeit der Komposition sowie der Inversenbildung via ϕ, beachte, dass wir nun die Differenzierbarkeit folgender beider Funktionen zwischen Untermengen von $mathbbC^2$ zeigen müssen:

$$I(e^{i\theta}, a) = \phi^{-1}((\phi(e^{i\theta}, a))^{-1}); \quad C((e^{i\theta}, a), (e^{i\mu}, b)) = \phi^{-1}(\phi(e^{i\theta}, a) \circ \phi(e^{i\mu}, b))$$

Bitte wenden!

Einige Rechnung zeigt, dass

$$I(e^{i\theta}, a) = (e^{-i\theta}, ae^{i\theta}); \quad C((e^{i\theta}, a), (e^{i\mu}, b)) = (e^{i(\theta+\mu)}\frac{1-\overline{b}ae^{-i\theta}}{\overline{a}be^{i\theta}-1}, \frac{b-e^{-i\theta}a}{1-\frac{b}{a}e^{-i\theta}})$$

Diese beiden Funktionen sind als Zusammensetzung von differenzierbaren Funktionen differenzierbar.

2. Wir zeigen dies der Einfachheit halber nur für ganz $\mathbb{C}$. Es sei also $S = \{(s_n, m_n)|s_n \in \mathbb{C}, m_n \in \mathbb{N}\}$ eine vorgegebene Nullstellenverteilung, die nach Beträgen aufsteigend geordnet ist. Der Produktsatz von Weierstrass konstruiert hierzu nun eine ganze Funktion f die als Nullstellengebilde genau die s_n mit der vorgegebenen Ordnung m_n besitzt. Der Satz von Mittag-Leffler hingegen konstruiert zu vorgegebenen Hauptteilen h_n eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ deren Laurententwicklung um die Punkte s_n genau die vorgegebenen Hauptteile h_n besitzt. Wir betrachten als Hauptteile $h_n(z) = \frac{m_n}{z-s_n}$ und erhalten durch den Satz von Mittag-Leffler eine meromorphe Funktion g wie oben beschrieben. Nun wollen wir eine ganze Funktion f finden, so dass $\frac{f'}{f} = g$ ist. Nach dem Argumentprinzip hat dann f Nullstellen in s_n mit den Ordnungen m_n. Wir konstruieren Lösungen f_N für dieses Problem in den Scheiben $D(0, N)$ wobei N eine natürliche Zahl ist, die auf den Schnittmengen $D(0, N_1) \cap D(0, N_2)$ übereinstimmen. So bekommen wir eine Lösung auf ganz $\mathbb{C}$. Wir machen den Ansatz:

$$f_N = e^{g_N(z)}(z-s_1)...(z-s_{k(N)})$$

wobei $s_{k(N)}$ die betragsmässig grösste Nullstelle in S ist, deren Betrag kleiner N ist und g_N eine noch zu bestimmende analytische Funktion. Nun betrachte

$$\frac{f_N'(z)}{f_N(z)} = g_N'(z) + \sum_{i=0}^{k(N)} \frac{m_i}{z-s_i}.$$

Es ist aber

$$h_N(z) := h(z) - \sum_{i=0}^{k(N)} \frac{m_i}{z-s_i}$$

in $D(0, N)$ analytisch da wir die Hauptteile aller dort vorkommenden Singularitäten beseitigt haben. Auch ist $D(0, N)$ ein Sterngebiet weshalb $h_N = g_N'$ hier eine Stammfunktion besitzt. Diese Stammfunktion löst nun das Problem in $D(0, N)$ und ist bis auf eine Konstante eindeutig. Die Wahl dieser Konstante erlaubt es nun, dass unsere Lösungen für $N, N+1$ auf der Schnittmenge übereinstimmen. Wir erhalten eine analytische Funktion, die sich durch wachsendes N beliebig weit fortsetzen lässt.

3. • Wir wenden Rouch auf die beiden Randkomponenten von $A_{1,2}(0)$ an: Zuerst für den Einheitskreis sei $h(z) = -4z$ dann gilt:

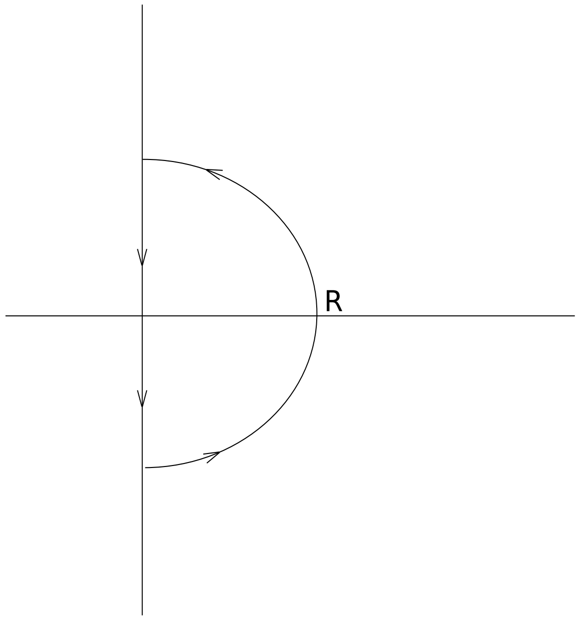
$$|f(z) - h(z)| = |z^5 + iz^3 + i| \leq |z|^5 + |z|^3 + 1 = 3 < 4 = |-4z| = |h(z)|$$

für alle $|z| = 1$. Somit haben f und h die gleiche Anzahl an Nullstellen in der Einheitskreisscheibe, sprich eine. Auf $\gamma(t) = 2e^{it}$ wähle $h(z) = z^5$. Damit

$$|f(z) - h(z)| = |iz^3 - 4z + i| \leq |z|^3 + 4|z| + 1 = 17 < 32 = |z|^5 = |h(z)|$$

und damit haben f und h die gleiche Anzahl von Nullstellen in $D(0, 2)$, also 5. Damit hat nun aber f 4 Nullstellen in $A_{1,2}(0)$.

- Es sei λ reell aber wir nehmen statt kleiner 0 an, dass $\lambda < -1$ (Ein Fehler in der Angabe). Dann betrachten wir die Kontur $\gamma_R(t)$ der folgenden Form



mit einem beliebigen $R > 2|\lambda|$ und $h(z) = \lambda + z$ gilt somit auf dem Teil entlang der imaginären Achse:

$$|g(z) - h(z)| = |e^{-z}| = 1 < |\lambda| \leq |\lambda + z| = |h(z)|$$

und entlang des Kreisbogens:

$$|g(z) - h(z)| = |e^{-z}| \leq 1 < |\lambda| < |z| - |\lambda| \leq |z + \lambda| = |h(z)|$$

und somit haben f und g nach dem Satz von Rouch dieselbe Anzahl an Nullstellen innerhalb der Kontur. Es hat aber h genau eine Nullstelle innerhalb, nämlich $z = -\lambda$.

4. Zuerst wollen wir zeigen, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine analytische Funktion auf $\mathbb{E}$ definiert. Dazu bemerken wir zuerst, dass die Summe für $z_0 = -1$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert (Für $a_n = (-1)^n c_n$ konvergiert $\sum a_n$ für c_n eine streng monoton fallende Nullfolge). Nach dem Satz von Abel ist damit aber der Konvergenzradius der Funktion mindestens 1 und damit definiert f eine analytische Funktion auf $\mathbb{E}$ wie behauptet. Auch folgt aus dem Satz von Abel (der Satz von Abel ist nicht mehr als das Majorantenkriterium), dass die Folge der Partialsummen $P_m(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n$ kompakt gegen f konvergiert. Falls wir also zeigen können, dass ein Polynom P mit streng monoton fallenden Komponenten keine Nullstelle in $\mathbb{E}$ haben kann, dann folgt aus dem Satz von Hurwitz, dass auch der Grenzwert f keine Nullstelle in $\mathbb{E}$ haben kann, sofern der Grenzwert nicht die Nullfunktion ist. Da aber bereits $c_0 \neq 0$ ist dies ausgeschlossen und somit hat auch die Grenzfunktion f keine Nullstelle wie behauptet.
Nun sei also $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_k z^k$ ein Polynom mit streng fallenden Koeffizienten und es sei z_0 eine Nullstelle. Es gilt $P(z_0)(1 - z_0) = 0$ und somit:

$$0 = a_0 + a_1 z_0 + ... a_k z_0^k - a_0 z_0 - a_1 z_0^2 - ... - a_k z_0^{k+1}$$

Also folgt

$$a_0 = |(a_0-a_1)z_0+...(a_{k-1}-a_k)z_0^k+a_kz_0^{k+1}| \leq |z_0|(|a_0-a_1|+...+|a_{k-1}-a_k||z_0|^{k-1}+|a_k||z_0|^k)$$

und damit wegen $|z_0| < 1$

$$a_0 < a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + ... - a_k + a_k = a_0$$

ein Widerspruch.

5. Es sei G sternförmig und z_0 der Sternmittelpunkt. Ist jetzt eine Schleife $\gamma\colon S^1 \to G$ mit Basispunkt z_0 gegeben, so können wir einfach eine Kontraktion durch die Sternmittelpunkteigenschaft hinschreiben:
$$\gamma_s(t) = (1-s)z_0 + s\gamma(t).$$
Dies ist eine stetige Familie (in s) von Schleifen mit Anfangs- und Endpunkt z_0. Im Allgemeinen hat eine Schleife $\gamma\colon S^1 \to G$ jedoch nicht den Sternmittelpunkt als Anfangs-und Endpunkt, wir konjugieren deshalb diese Schleife mit dem Weg $\delta\colon [0,1] \to G;\ t \mapsto \delta(t) = (1-t)\gamma(0) + tz_0$. Die resulierende Schleife $\bar{\gamma} = \delta * \gamma * \delta^{-1}$ hat jetzt Anfangs-und Endpunkt z_0 und deshalb existiert eine Kontraktion $\bar{\gamma}_s$ von $\bar{\gamma}$ wie oben. Nochmalige Konjugation von $\bar{\gamma}_s$ jetzt mit δ, also $\widetilde{\gamma} := \delta^{-1} * \bar{\gamma}_s * \delta$ liefert eine Kontraktion von $\widetilde{\gamma} = \delta^{-1} * \delta * \gamma\delta^{-1} * \delta$ zum Punkt $\gamma(0)$. Abschliessend bleibt zu bemerken, dass $\widetilde{\gamma}$ homotop zu γ ist. Es sei $\alpha_s = \delta_s^{-1} * \delta_s$ wobei $\delta_s(t) = \delta(st)$ den Weg von $\delta(0)$ bis $\delta(s)$ beschreibe. α_s ist somit eine Kontraktion von $\delta^{-1} * \delta$. Also ist $\widetilde{\gamma}_s = \alpha_s * \gamma * \alpha_s$ die gewünschte Homotopie von $\widetilde{\gamma}$ und γ. Wie in der Vorlesung gezeigt ist Homotopie eine Äquivalenzrelation, deshalb folgt jetzt aus der Kontrahierbarkeit von $\widetilde{\gamma}$ und der Homotopie von $\widetilde{\gamma}$ und γ die Kontrahierbarkeit von γ und somit der einfache Zusammenhang von G. Konzeptionell sollte man die Sache jedoch anders angehen und das Konzept der Fundamentalgruppe einführen und dort dann die Unabhängigkeit vom Basispunkt zeigen. Siehe "Allen Hatcher, Algebraic Topology," Seite 26-28.

6.
   - $(a) \iff (b)$ Wenn G einfach zusammenhängend ist aber nicht ganz $\mathbb{C}$, dann gibt uns der Riemannsche Abbildungssatz eine Biholomorphe Abbildung von G nach $\mathbb{E}$. Ein Biholomorphismus ist aber im Besonderen ein Homomorphismus. Es bleibt also zu zeigen, dass es einen Homomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{E}$ gibt. Hierzu betrachte die Abbildung
   $$\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{E};\quad z \mapsto \frac{z}{1+|z|}.$$
   Diese Abbildung ist stetig und ein stetiges Inverses ist
   $$\psi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{C};\quad w \mapsto \frac{w}{1-|w|}.$$
   Ist andererseits ein Homöomorphismus ϕ zwischen G und der Einheitskreisscheibe gegeben. Es sei $\gamma\colon S^1 \to G$ eine Schleife in G, dann ist $\widetilde{\gamma} := \phi \circ \gamma$ eine Schleife in $\mathbb{E}$ und wegen des einfachen Zusammenhangs von $\mathbb{E}$ existiert eine Kontraktion $\widetilde{\gamma}_s$ von $\widetilde{\gamma}$ auf den Startpunkt $\phi(\gamma(0))$. Damit ist aber $\phi^{-1}\widetilde{\gamma}_s$ eine Kontraktion von γ und damit ist G einfach zusammenhängend.
   - $(a) \iff (c)$ Wenn G einfach zusammenhängend ist, dann besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion (siehe Vorlesung) und umgekehrt. Es sei jetzt $u\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch, dann ist die Funktion $g = u_x - iu_y$ holomorph. Sie besitzt also eine Stammfunktion $H = U + iV$ mit $U = u + c$ für eine Konstante c. Damit ist also $H - c$ eine holomorphe Funktion auf G mit Realteil u. Es sei andererseits G ein Gebiet, so dass für jede harmonische Funktion u eine holomorphe Funktion g auf G existiert mit Realteil u.

Zuerst wollen wir bemerken, dass der homologe einfache Zusammenhang eines Gebiet G äquivalent zum einfachen (homotopen) Zusammenhang von G ist. Dies folgt aus der Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes. Nach diesem gilt die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

- $\int_\alpha f = 0$ für jede analytische Funktion $f \colon G \to \mathbb{C}$
- α ist nullhomolog in G.

Falls G (homotop) einfach zusammenhängend ist, so ist jede geschlossene Kurve α in G kontrahierbar und somit verschwindet das Intrgral jeder analytischen Funktion f in G um α. Also folgt nach dem Satz, dass α null-homolog in G ist und somit ist G homolog einfach zusammenhängend. Andererseits sei G homolog einfach zusammenhängend, dann verschwindet nach dem Satz das Integral jeder analytischen Funktion f in G um jede geschlossene Kurve α (alle geschlossenen Kurven in G sind null-homolog). Das heisst aber, dass f eine Stammfunktion in G besitzt und somit ist G ein Elementargebiet (und damit einfach zusammenhängend).
Wir wollen also zeigen, dass für jede geschlossene Kurve α in G ihr Inneres in G liegt (dann ist G homolog einfach zusammenhängend). Betrachte ein $a \in \mathbb{C} - G$, dann ist

$$w(\alpha, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{1}{z-a} dz.$$

Also für $f(z) = z - a$ ist

$$w(\alpha, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Es ist aber f Nullstellenfrei auf G und wir zeigen, dass f auf G einen Logarithmus besitzt, dass heisst es existiert eine holomorphe Funktion l auf G mit

$$f = e^l.$$

Damit ist aber

$$\int_\alpha \frac{f'}{f} dz = \int_\alpha l' dz = 0$$

und somit ist das Innere von α in G enthalten. Es sei also f eine nullstellenfreie analytische Funktion auf G, dann ist die Funktion $u(z) = log|f(z)|$ harmonisch auf G. Nach der Voraussetzung existiert eine analytische Funktion F mit Realteil u. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dann gilt

$$f(z) = e^{F(z)+c}$$

für eine konstante c. Damit haben wir den gewünschten Logarithmus von f gefunden.

- $(a) \iff (d)$
  Wir zeigen jetzt also den homologen einfachen Zusammenhang von G (siehe vorherige Teilaufgabe). Es gelte (d) und es sei α in G eine geschlossene Kurve. Wir zerlegen das Komplement von G in zwei disjunkte Teilmengen.

$$K = \{a \in \mathbb{C} - G | w(\alpha, a) \neq 0\}\,; \quad D = \{a \in \mathbb{C} - G | w(\alpha, a) = 0\}$$

Dann sind beide Mengen als Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter der stetigen Funktion $z \mapsto w(\alpha, z)$ $(z \in \mathbb{C} - G)$ selbst abgeschlossen. Auch ist K beschränkt, da aufgrund der Kompaktheit von α_* eine Scheibe $D(0, R)$ existiert, so dass $\alpha_* \subset D(0, R)$ und die Windungszahlen von α um alle Punkte im Komplement von $D(0, R)$ verschwinden. Damit ist K kompakt und deshalb nach Vorausetzung ist $K = \emptyset$. Also ist das Innere von α in G enthalten und α ist nullhomolog. Daraus folgt der (homologe) einfache Zusammenhang von G. Andererseits sei jetzt G einfach zusammenhängend, dann argumentieren wir indirekt und nehmen an es existiert eine disjunkte Zerlegung des Komplements in eine abgeschlossene und eine nichtleere kompakte Teilmenge, also

$$\mathbb{C} - G = D \cup K.$$

Es gilt

$$D \cup K = \mathbb{C} - D$$

und damit ist die Menge $D \cup K$ offen. Wie in Busam/Freitag schliessen wir den Beweis mit einem Lemma (Seite 246, Hilfsatz C2 in Busam/Freitag). Aufgrund der Länge des Beweises dieses Hilfssatzes geben wir diesen hier nicht wieder sondern verweisen den Leser auf die angegebene Quelle.

Hilfssatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset U$ ein nichtleeres Kompaktum. Dann ist die Menge$G := U - K$ nicht einfach zusammenhängend.

Damit folgt der gewünschte Widerspruch und somit der Beweis der Äquivalenz der beiden Behauptungen.