Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
A. Stadelmaier
M. Schwingenheuer

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Lösungen zu Übungsblatt 12

1. Bestimmen Sie die Ordnung aller Punkte und klassifizieren Sie alle Polstellen folgender Funktionen:

   (a)

$$f(z) := z\frac{(z-1)^2(z+3)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}$$

Lösung: Schreiben wir f ein wenig um, sodass wir sofort die Ordnung der Funktion an einer Stelle unter Verwendung von $\mathrm{ord}_z\, f\, g = \mathrm{ord}_z\, f + \mathrm{ord}_z\, g$ und $\mathrm{ord}_z\, f^{-1} = -\mathrm{ord}_z\, f$ ablesen können:

$$f(z) = -z(z-1)\frac{(z-1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(z-1)\right)}(z+3)\,.$$

Daher gilt für die Ordnungen von f

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_0\, f = 1\\
&\mathrm{ord}_1\, f = 1\\
&\mathrm{ord}_{-3}\, f = 0 \quad \text{und}\\
&\mathrm{ord}_{2k+1}\, f = -1 \quad \text{für } k \neq 0 \text{ und } k \neq -2\,.
\end{aligned}$$

Alle anderen Ordnungen verschwinden. Die Klassifikation ist wie folgt: -3 ist eine hebbare Singularität, wobei für $k \neq 0$ und $k \neq -2$ die Funktion bei $2k+1$ einen Pol erster Ordnung hat.

   (b)

$$g(z) := \frac{\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)(1-z)}{\cos(2\pi z)}$$

Lösung: Hier liegt in $z = 1$ eine wesentliche Singularität und in den Nullstellen des Nenners Pole einfacher Ordnung vor. Diese erhalten wir mit

$$2\pi z \in (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} + \frac{1}{4}$$

Demnach erhalten wir für die Ordnungen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_1\, g = -\infty\\
&\mathrm{ord}_{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}\, g = -1\,.
\end{aligned}$$

Für alle anderen z verschwindet die Ordnung.

2. Es sei f holomorph auf einem Gebiet U und es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Weiterhin sei g auf $f(U)$ meromorph. Man drücke $\mathrm{res}_z\, g \circ f$ durch $\mathrm{res}_{f(z)}\, g$ aus. Ist das Residuum einer Funktion demnach invariant unter biholomorphen Abbildungen?

Lösung: Da $f'(z) \neq 0$ auf einem Gebiet U, existiert f^{-1} auf diesem Gebiet. Da $f|_U$ holomorph, ist f eine Biholomorphie von $f : U \to f(U)$. Nun ist nach Angabe $g|_{f(U)}$ meromorph. Daher gilt für das Residuum

$$\mathrm{res}_z\, g \circ f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} g(f(z))\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f\circ\gamma} g(w) \frac{df^{-1}}{dw}(w)\, dw = \\ = \mathrm{res}_{f(z)}\, g \frac{df^{-1}}{dw}\,.$$

Dies gilt, da aufgrund der biholomorphie von f, bzw. der Stetigkeit, das Bild unter f einer Kurve γ, welche sich zu einem Punkt z zusammenzieht, eine Kurve $f(\gamma)$ ist, die sich zu einem Punkt $f(z)$ zusammenzieht. Das Innere der Kurve γ wird also auf das Innere der Kurve $f(\gamma)$ abgebildet. Daher wird ein Residuum an der Stelle z auf ein Residuum an der Stelle $f(z)$ abgebildet. Obige Gleichung zeigt, das das Residuum einer Funktion nicht invariant unter Biholomorphien ist. Die folgende Ergänzung ist nicht mehr Teil der Lösung. Definieren wie stattdessen das Residuum einer 1-Form $\omega(z) = f(z)dz$ durch

$$\mathrm{res}_z\, \omega := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \omega := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

und beachten das Transformationsverhalten von 1-Formen, so erkennen wir, dass das so definierte Residuum einer 1-Form invariant ist unter biholomorphen Abbildungen.

3. Es sei G ein zusammenhängendes Gebiet, sodass jede in G verlaufende Kurve nullhomolog ist, $D \subset G$ eine diskrete Teilmenge und f holomorph auf $G \setminus D$. Man zeige: Genau dann hat f eine Stammfunktion auf $G \setminus D$, wenn alle Residuen von f verschwinden.

Lösung Wir wissen, dass f genau dann eine Stammfunktion auf $G \setminus D$ hat, falls jedes geschlossene Wegintegral über eine beliebige Kurve γ, die komplet im Inneren von $G \setminus D$ verläuft, verschwindet. Sei daher nun γ eine beliebige Kurve in $G \setminus D$. Darum ist γ^* Rand einer kompakten Menge $K(\gamma)$. Da D diskret ist, folgt, dass $K(\gamma) \cap D$ endlich ist. Daher lassen sich die Elemente $s_n \in K(\gamma) \cap D$ dem Betrage nach sortieren: $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots \leq |s_N|$. Daraus ergibt sich für das Integral

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{|z-s_n|=\epsilon} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{W}(\gamma, s_n)\, \mathrm{res}_{s_n} f$$

Nehmen wir nun an, dass alle Residuen verschwinden. Dann verschwinden auch alle Integrale und f hat damit eine Stammfunktion. Angenommen alle Integrale verschwinden. Dann existiert zu jedem $s \in D$ eine Kurve $\gamma(s)$, die nur s umschließt (Die Windungszahl um alle anderen $s' \in D$ verschwindet). Dann verschwindet auch

$$0 = \int\limits_{\gamma(s)} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{res}_s\, f\,.$$

Daher verschwinden alle Residuen und die Aussage ist gezeigt.

4. Zeigen Sie unter Verwendung des Residuensatzes folgendes Theorem:
Sei $f \in \mathcal{M}(D) \setminus \{f(z) \equiv a\}$ für ein Gebiet D und ein $a \in \mathbb{C}$, und γ eine in D nullhomologe geschlossene Kurve mit $\gamma^* \cap (P(f) \cup f^{-1}(a)) = \{\}$, und $F \in \mathcal{O}(D)$. Dann gilt

$$\int\limits_{\gamma} F(\xi)\, \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - a}\, d\xi = 2\pi i \sum_{c \in P(f) \cup f^{-1}(a)} W(\gamma, c)\, \mathrm{ord}_c(f - a)\, F(c)$$

Lösung: Laut Vorlesung ist $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_{z_0} f$. Weiterhin wurde in den Präsenzübungen gezeigt, dass für $f|_D$ meromorph und $g|_D$ holomorph $\operatorname{res}_{z_0} f\, g = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0} f$ gilt. Nach Voraussetzung lässt sich der Residuensatz für nullhomologe Wege hier für beliebige Kurven γ, welche komplett in D verlaufen anwenden (beachte, dass ein Pol von f auch ein Pol von $f - a$ ist und umgekehrt):

$$\int_\gamma F(\xi)\, \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - a}\, d\xi = \int_\gamma F(\xi)\, \frac{\frac{d}{d\xi}(f(\xi) - a)}{f(\xi) - a}\, d\xi =$$

$$= 2\pi i \sum_{c \in P(f-a) \cup f^{-1}(a)} W(\gamma, c) \operatorname{res}_c \left(F\, \frac{\frac{d}{dz}(f-a)}{f-a} \right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{c \in P(f) \cup f^{-1}(a)} W(\gamma, c) \operatorname{res}_c \frac{\frac{d}{dz}(f-a)}{f-a}\, F(c) =$$

$$= 2\pi i \sum_{c \in P(f) \cup f^{-1}(a)} W(\gamma, c)\, F(c) \operatorname{ord}_c(f - a)$$

5. Sei G ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und habe in z_0 eine isolierte Singularität. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen
   (a) Für jede Umgebung $U \subset G$ von z_0 ist $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$
   (b) Es gibt eine Folge $z_n \to z_0$ in G, für die $f(z_n)$ beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Lösung: Wir zeigen zunächst

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $\forall\, U \subset G$ mit $z_0 \in U$ nun $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\forall\, z \in \mathbb{C} : \forall\, \epsilon > 0 : \exists\, \tilde{z} \in U \setminus \{z_0\} : |z - f(\tilde{z})| < \epsilon\,.$$

Daher enthält für eine streng monoton fallende Nullfolge $\epsilon_n \to 0$ die Menge $U_{\epsilon_n}(z_0)$ mindestens ein Urbild eines Elements von $U_{\epsilon_n}(1)$, welches wir z_{2n} nennen, und eines von $U_{\epsilon_n}(-1)$, welches wir z_{2n+1} nennen. Da $U_{\epsilon_n} \supset U_{\epsilon_{n+1}}$ und $\epsilon_n \to 0$, konvergiert z_n gegen z_0. Die so konstruierte Folge (z_n) erfüllt aber $f(z_n)$ ist beschränkt, wobei $f(z_n) \in U_\epsilon(1)$ und $f(z_{n'}) \in U_\epsilon(-1)$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$ und unendlich viele Folgenglieder $z_n \neq z_{n'}$. Daher kann $f(z_n)$ nicht konvergieren. Zeigen wir nun

(b) $\Rightarrow$ (a): Angenommen $\exists\, (z_n)$ mit $z_n \to z_0$ in G, sodass $f(z_n)$ beschränkt aber nicht konvergent ist. Angenommen (a) gilt nicht. Dann muss f in z_0 nach dem Satz von Casorati-Weierstraß einen Pol endlicher Ordnung $k \in \mathbb{N}$ haben, da sonst (a) erfüllt wäre. Daher muss für jede Folge $z_n \to z_0$

$$\forall\, R > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N : |f(z_n)| > R$$

erfüllt sein. Dies ist ein Widerspruch zur Beschränktheit von $f(z_n)$. Daher muss f in z_0 eine wesentliche Singularität haben und nach dem Satz von Casorati-Weierstraß (a) erfüllt sein. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) bewiesen.

6. Sei f analytisch in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, welches die Null enthält. Ferner sei $|f(z)| < C\ \forall z \in D$ mit $0 < C < \inf_{z \in \partial D} |z|$. Man zeige: Es existiert eine abgeschlossene Kreisscheibe in D, sodass f im Inneren dieser Kreisscheibe genau einen Fixpunkt hat (Hinweis: Sie benötigen ein Ergebnis aus der Vorlesung vom Donnerstag).

Lösung: Da $0 < C < \inf_{z \in \partial D} |z|$ existiert eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D(0,R)} \subset D$ mit $C < R < \inf_{z \in \partial D} |z|$. Daher ist $|f(z)| < C < |z|$ für $z \in \partial \overline{D(0,R)}$. Nach dem Satz von Rouche haben $f(z) - z$ und z gleich viele Nullstellen in $D(0,R)$, nämlich genau eine. Daher hat $f(z) - z = 0 \Leftrightarrow f(z) = z$ genau eine Lösung und damit f genau einen Fixpunkt in $D(0,R)$.

Disclaimer Diese Lösungen sind als Lösungsskizzen zu verstehen und erheben nicht den Anspruch auf Fehlerfreiheit.