Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie

Lösungen zu Übungsblatt 11

1. Sei $f(z) = (z-1)^{-1}(z-2)^{-2}$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

Beh. (a): *Die Laurententwicklung von $f(z)$ im Ringgebiet $A_{0,1}(0)$ lautet:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+3)\frac{1}{2^{n+2}}-1\right)z^n$$

Beweis. Die Partialbruchzerlegung von $f(z)$ lautet:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}$$

Für $|z| < 1$ gilt:

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Der Term $-(z-2)^{-1}$ wird ebenfalls mit Hilfe der geometrischen Reihe entwickelt für $|z| < 2$:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n$$

Den mittleren Term erhalten wir als Ableitung von $-(z-2)^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

Mit der gliedweise differenzierten Reihe gilt also:

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{2^n}z^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

Mit der Gleichung

$$(n+1)\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} = (n+3)\frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt die Behauptung. □

Beh. (b): *Die Laurententwicklung von $f(z)$ im Ringgebiet $A_{1,2}(0)$ lautet:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+3) \frac{1}{2^{n+2}} \right) z^n$$

Beweis. Mit der Partialbruchzerlegung von Teil a) und der auch in diesem Falle gültigen Entwicklung von $-(z-2)^{-1}$ von Teil a) ergibt sich der Nebenteil der angegebenen Reihe. Der erste Term der Partialbruchzerlegung läßt sich wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

Für $|z| > 1$ gilt:

$$\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beh. (c): *Die Laurententwicklung von $f(z)$ im Ringgebiet $A_{2,3}(0)$ lautet:*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(1 + (n-3)\, 2^{n-2}\right) \frac{1}{z^n}$$

Beweis. Der erste Term $(z-1)^{-1}$ der Partialbruchzerlegung ergibt wie in Teil b):

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Wir schreiben für $-(z-2)^{-}1$:

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

Für $|z| > 2$ gilt:

$$-\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$$

Mit der gliedweise differenzierten Reihe gilt nun wie in Teil a):

$$\frac{1}{(z-2)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^{n+1}}(-n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{z^n}(n-1)$$

Die Addition der 3 Teile liefert das Ergebnis. □

Beh. (d): *Die Laurententwicklung von $f(z)$ im Ringgebiet $A_{0,1}(1)$ lautet:*

$$\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(z-1)^n$$

Beweis. Der erste Term der Partialbruchentwicklung ist schon in der richtigen Form. Für $-(z-2)^{-1}$ schreiben wir:

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{1-(z-1)}$$

Für $|z-1|<1$ gilt nun:

$$\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

Mit der gliedweise differenzierten Reihe gilt nun wie in Teil a):

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-1)^n$$

Die Summe der 3 Teile ist die Formel der Behauptung. □

Beh. (e): *Die Laurententwicklung von $f(z)$ im Ringgebiet $A_{1,2}(1)$ lautet:*

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\,\frac{1}{(z-1)^n}$$

Beweis. Auch hier ist der erste Term schon in der richtigen Form. Für $-(z-2)^{-1}$ schreiben wir:

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{(z-1)}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$$

Für $|z-1|>1$ gilt nun:

$$-\frac{1}{(z-1)}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = -\frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

Mit der gliedweise differenzierten Reihe gilt nun wie in Teil a):

$$\frac{1}{(z-2)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\frac{1}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{1}{(z-1)^n}$$

Addition liefert das Ergebnis. □

2. Berechnung von reellen Integralen mit Hilfe des Residuensatzes.

   Beh. (a): *Es gilt die folgende Identität:*

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(3t)}{5-3\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 0$$

   Beweis. Für dieses Integral verwenden wir den folgenden Satz aus der Vorlesung:

   Satz (21.5). *Seien $P,Q\in\mathbb{C}[x,y]$ Polynome in zwei Veränderlichen, wobei $Q(x,y)\neq 0$ gelte für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2=1$. Sei*

$$R(x,y) := \frac{P}{Q}$$

   rationale Funktion in zwei Veränderlichen. Definiere eine meromorphe Funktion $f:\mathbb{E}\mapsto\overline{\mathbb{C}}$ wie folgt:

$$f(z) := \frac{1}{\mathrm{i}z}\,R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

   Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t),\sin(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in\mathbb{E}}\mathrm{Res}_z(f)$$

Der Nenner des Integranden hat bereits die richtige Form, wir setzen:

$$Q(x,y) := 5 - 3x$$

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ gilt $Q(x,y) \neq 0$. Für den Zähler verwenden wir das Additionstheorem für Vielfache des Argumentes:

$$\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$$

und setzen:

$$P(x,y) := 3y - 4y^3$$

Damit gilt für die Funktion $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z} \frac{3\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right) - 4\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^3}{5 - 3\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{z^6 - 1}{3z^3(z - \frac{1}{3})(z-3)}$$

Diese Funktion besitzt 2 Pole innerhalb $\mathbb{E}$, einen bei $z = 0$ und einen bei $z = \frac{1}{3}$.

Berechnung von $\mathrm{Res}_0(f)$:

Es reicht das Residuum von

$$g(z) := -\frac{1}{3z^3(z - \frac{1}{3})(z-3)}$$

zu berechnen, da $f = g + h$ gilt, wobei h eine an der Stelle 0 holomorphe Funktion bezeichnet. Die Funktion g hat an der Stelle $z = 0$ einen Pol der Ordnung 3, wir können also das Residuum folgendermaßen berechnen:

$$\mathrm{Res}_0(g) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3(z - \frac{1}{3})(z-3)}\right)^{(2)}(0)$$

Es gilt:

$$\left(-\frac{1}{3(z - \frac{1}{3})(z-3)}\right)^{(1)} = \frac{6z - 10}{9((z - \frac{1}{3})(z-3))^2}$$

Damit:

$$\left(-\frac{1}{3(z - \frac{1}{3})(z-3)}\right)^{(2)} = \frac{6}{9((z - \frac{1}{3})(z-3))^2} - \frac{2(6z-10)(6z-10)}{27((z - \frac{1}{3})(z-3))^3}$$

Also gilt:

$$\mathrm{Res}_0(g) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{27} - \frac{200}{27}\right) = -\frac{91}{27}$$

Berechnung von $\mathrm{Res}_{\frac{1}{3}}(f)$:

Der Pol von f an der Stelle $z = \frac{1}{3}$ hat die Ordnung 1, wir können also schreiben:

$$\mathrm{Res}_{\frac{1}{3}}(f) = \frac{z^6 - 1}{3z^3(z-3)}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1 - 3^6}{3^3(1-9)} = \frac{728}{216} = \frac{91}{27}$$

Insgesamt heben sich die beiden Residuen also gerade gegenseitig auf und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Beh. (b): *Es gilt die folgende Identität:*

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Beweis. Für dieses Integral verwenden wir den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz (21.7). *Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome in einer Veränderlichen, wobei $Q^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $\operatorname{grad} Q \geq 2 + \operatorname{grad} P$ gelte. Sei*

$$f(x) := \frac{P}{Q}$$

meromorphe Funktion. Dann gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z(f)$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt und wir können die Pole des Integranden bestimmen. Es gilt:

$$f(x) := \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^6-1}$$

Die Pole der Funktion sind also die sechsten Einheitswurzeln ohne die Wurzeln 1 und -1. Von diesen liegen 2 in der oberen Halbebene:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Dies sind alles einfache Pole und wir berechnen die Residuen wie folgt:

$$\operatorname{Res}_{z_1}(f) = \frac{1}{(z_1 - (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3})(z_1 - (-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3})(z_1 - (-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}-3}$$

und

$$\operatorname{Res}_{z_2}(f) = \frac{1}{(z_1 - (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3})(z_1 - (-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3})(z_1 - (\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}+3}$$

Damit gilt also:

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_z(f) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Da f eine gerade Funktion auf $\mathbb{R}$ ist, gilt:

$$2\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

3. Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ die offene und $\overline{\mathbb{E}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Nach der Vorlesung wissen Sie, daß sich die Automorphismen ϕ von $\mathbb{E}$ stetig zu Abbildungen $\tilde{\phi}$ von $\overline{\mathbb{E}}$ nach $\overline{\mathbb{E}}$ fortsetzen. Sei $z \in \partial\mathbb{E}$ mit $\mathrm{Im}\,(z) > 0$.

   Beh.: *Es existiert genau ein Automorphismus ϕ, so daß $\tilde{\phi}(1) = 1$, $\tilde{\phi}(-1) = -1$ und $\tilde{\phi}(\mathrm{i}) = z$ gilt.*

   Beweis. Sei $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Nach der Vorlesung hat der Automorphismus ϕ folgende Gestalt:

$$\phi(z) = c\,\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad \text{wobei } (c,a) \in \partial\mathbb{E} \times \mathbb{E}$$

   Diese Funktion ist definiert für alle z mit $|z| \leq 1$ und stetig auf $\overline{\mathbb{E}}$.Die stetige Fortsetzung $\tilde{\phi}$ besitzt also die gleiche Abbildungsvorschrift.

   Für die Fortsetzungen von Automorphismen, die 1 und -1 fixieren, muß also gelten:

$$\tilde{\phi}(1) = c\,\frac{1-a}{1-\bar{a}} = 1$$

   und

$$\tilde{\phi}(-1) = c\,\frac{-1-a}{1+\bar{a}} = -1$$

   für das gleiche Paar $(c,a) \in \partial\mathbb{E} \times \mathbb{E}$. Dies ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} c - ca &= 1 - \bar{a} \\ c + ca &= 1 + \bar{a} \end{aligned}$$

   Die beiden Gleichungen addiert ergibt die Bedingung $c = 1$. Damit ergibt sich für a:

$$a = \bar{a}$$

   Die Konstante a muss also reell sein. Für einen Punkt $z \in \partial\mathbb{E}$ mit $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ soll nun folgendes gelten:

$$\tilde{\phi}(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}-a}{1-a\mathrm{i}} = -\frac{2a}{1+a^2} + \mathrm{i}\,\frac{1-a^2}{1+a^2} = z$$

   Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : (-1,1) &\longrightarrow \partial\mathbb{E} \cap \mathbb{H} \\ a &\longmapsto -\frac{2a}{1+a^2} + \mathrm{i}\,\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{aligned}$$

   bijektiv ist. Sei also $z = x + \mathrm{i}y$. Die Gleichung

$$y = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

   hat die Lösungen

$$a_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

   und die Gleichung

$$x = \frac{-2a}{1+a^2}$$

   legt das Vorzeichen der Lösung fest. Damit ist die Bijektivität klar und die Behauptung bewiesen. $\square$

4. **Beh. (a):** *Sei L eine Laurentreihe, die auf einer nichtleeren offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ konvergiert. Es existieren $0 \leq r < R \leq \infty$ und $p \in \mathbb{C}$, so daß $A_{r,R}(p)$ das größte Ringgebiet ist, auf dem L konvergiert.*

   Beweis. Da L auf einer nichtleeren offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ konvergiert, existiert $z_0 \in U$, so daß L in z_0 konvergiert. Betrachte zuerst den Nebenteil der Reihe: dies ist eine Potenzreihe, die im Punkte z_0 konvergiert. Damit existiert $R > |z_0|$, so daß der Nebenteil auf der Kreisscheibe $D(0, R)$ konvergiert. Beachte: Der Konvergenzradius R ist echt größer als der Betrag von $|z_0|$, da U offen ist. Der Hauptteil der Reihe L ist eine Potenzreihe in $\frac{1}{z}$. Da der Hauptteil ebenfalls in z_0 konvergiert, existiert $r < |z_0|$, so daß der Hauptteil auf dem Komplement der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D(0, r)}$ konvergiert. Auch hier ist der Konvergenzradius r echt kleiner als $|z_0|$, da U offen ist. Wir haben also Konvergenz von L auf dem Ringgebiet $A_{r,R}(0)$ und dies ist das größte Ringgebiet auf dem L konvergiert. □

   Beh. (b): *Sei $m > 0$. Definiere die Funktion $f_m(z)$ über die $(m-1)$-te Partialsumme der geometrischen Reihe:*

$$f_m(z) := \sum_{k=0}^{m-1} z^k.$$

   Definiere damit eine Funktion $g_m(z)$,

$$g_m(z) := \sum_{k=0}^{m-1} z^{mk} f_m\left(\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{k\,2\pi}{m}\right) z\right)$$

   und erkläre eine Potenzreihe mit Koeffizienten a_n über

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}}\, z^{\sum_{k=0}^{m-1} k^2} g_m(z). \tag{1}$$

   Definiere nun eine Laurentreihe mit Koeffizienten b_n. Seien

$$\begin{aligned} b_{2k} &= a_k && \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \\ b_{2k+1} &= -a_k && \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \\ b_{-2k-1} &= -a_k && \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

   Dann ist

$$L(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

   eine Laurentreihe, die nur im Punkte $z = 1$ konvergiert.

   Bemerkung. *Diese Aufgabe war schwieriger als von uns beabsichtigt war.*

   Beweis. Die Idee ist, zuerst eine Potenzreihe $P(z)$ mit Konvergenzradius 1 zu konstruieren, deren Koeffizienten a_n eine Nullfolge bilden und die überall auf dem Rand der Konvergenzscheibe divergiert. Damit baut man eine alternierende Reihe, die in genau einem Punkt auf dem Rand konvergiert und ergänzt diese symmetrisch zu einer Laurentreihe.

   Die Konstruktion in der Behauptung definiert tatsächlich eine Laurentreihe: Die Funktion $g_m(z)$ ist ein Polynom $(m-1)(m+1)$-ten Grades. In der definierenden Gleichung (1) liefert jeder Term auf der rechten Seite ausschließlich höhere Exponenten von z als der vorhergehende, da

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 + (m-1)(m+1) < \sum_{k=0}^{m} k^2$$

Damit ist die Reihe $P(z)$ eine Potenzreihe, also auch die Reihe $L(z)$ eine Laurentreihe.

In dem Polynom $g_m(z)$ haben alle Koeffizienten den Absolutbetrag 1. Damit ist klar, daß die Koeffizienten a_n eine Nullfolge bilden. Im nächsten Schritt werden wir zeigen, daß die Potenzreihe $P(z)$ in jedem Punkt des Randes der Einheitskreisscheibe divergiert. Das bedeutet aber, daß der Konvergenzradius 1 ist.

Sei $\zeta = e^{\mathrm{i}\phi} \neq 1$. Es gilt:

$$|f_m(\zeta)| = \left| \frac{1 - \exp(\mathrm{i}m\phi)}{1 - \exp(\mathrm{i}\phi)} \right| = \left| \frac{\exp(-\frac{\mathrm{i}m\phi}{2}) - \exp(\frac{\mathrm{i}m\phi}{2})}{\exp(-\frac{\mathrm{i}\phi}{2}) - \exp(\frac{\mathrm{i}\phi}{2})} \right| = \left| \frac{\sin(\frac{m\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right|$$

Auf dem Kreisbogen $-\frac{\pi}{m} \leq \phi \leq \frac{\pi}{m}$ ohne den Punkt $\phi = 0$ gilt also:

$$|f_m(\zeta)| \geq \frac{\frac{2}{\pi}\left|\frac{m\phi}{2}\right|}{\left|\frac{\phi}{2}\right|} = \frac{2}{\pi} m \tag{2}$$

Beachte dazu, daß

$$\left| \frac{m\phi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2}$$

gilt und damit

$$\left| \sin\left(\frac{m\phi}{2}\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} \left| \frac{m\phi}{2} \right|$$

Die Abschätzung (2) gilt auch für den Punkt $\phi = 0$. Für alle $\zeta = e^{\mathrm{i}\phi}$ gibt es also ein $l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq l < m$, so daß

$$\left| f_m\left(\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{l\,2\pi}{m}\right)\zeta\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} m$$

gilt. Damit folgt

$$\max_{0 \leq l < m} \left| f_m\left(\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{l\,2\pi}{m}\right)\zeta\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} m \tag{3}$$

Sei nun ζ ein Punkt in $\partial\mathbb{E}$. Wenn die Reihe dort konvergieren würde, so müßten die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Damit müßte auch

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} |\zeta^{\sum_{k=0}^{m-1} k^2}| \max_{0 \leq l < m} \left| \zeta^{ml} f_m\left(\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{l\,2\pi}{m}\right)\zeta\right) \right| = 0$$

gelten. Dies steht aber im Widerspruch zu Ungleichung (3).

Der Nebenteil der Laurentreihe L ist am Punkt $z = 1$ eine alternierende Reihe deren Glieder eine Nullfolge bilden, also konvergent. Wäre dieser Nebenteil auch für einen Punkt $\zeta = e^{\mathrm{i}\phi} \neq 1$ konvergent, so würde auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{2n} (1 - \zeta)$$

konvergieren, also auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{2n}.$$

Da $|\zeta^2| = 1$ steht dies aber im Widerspruch zur Divergenz von P auf $\partial\mathbb{E}$.

Der Hauptteil von L ist eine Potenzreihe in $\frac{1}{z}$ mit den gleichen Koeffizienten wie der Nebenteil ohne a_0. Diese Reihe hat also auch den Konvergenzradius 1 und das gleiche Randverhalten. Damit ist 1 der einzige Punkt in $\mathbb{C}$ in dem L konvergiert. $\square$

5. Konvergenzgebiete von Laurentreihen.

Beh. (a): *Das maximale Konvergenzgebiet der Laurentreihe*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{T^n}{n^2+2}$$

ist der Rand der Einheitskreisscheibe.

Beweis. Der Nebenteil der Reihe besitzt den Konvergenzradius 1, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+2}{n^2+2} = 1$$

Auf dem Rand der Konvergenzscheibe konvergiert die Reihe absolut. Sei dazu $z \in \partial\mathbb{E}$. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert. Der Hauptteil der Reihe ist eine Potenzreihe in $\frac{1}{z}$ mit denselben Koeffizienten wie der Nebenteil ohne a_0. Damit ist das maximale Konvergenzgebiet der Rand der Einheitskreisscheibe. □

Beh. (b): *Das maximale Konvergenzgebiet der Laurentreihe*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{T^n}{\exp(\alpha n) + \exp(-\alpha n)} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

ist $\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(-\alpha) < |z| < \exp(\alpha)\}$ *für* $\alpha \neq 0$. *Für* $\alpha = 0$ *divergiert die Reihe überall.*

Beweis. Sei zuerst $\alpha = 0$. Dann hat die Reihe die Form:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} T^n.$$

Der Konvergenzradius von Haupt- und Nebenteil ist jeweils 1. Mögliche Konvergenzpunkte liegen also nur auf dem Rand der Einheitskreisscheibe, aber dort bilden die Reihenglieder keine Nullfolge.

Sei also jetzt $\alpha \neq 0$. Wir berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\exp(\alpha n) + \exp(-\alpha n)} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\exp(\alpha n)}{\exp(2\alpha n) + 1} \right)^{\frac{1}{n}} = \exp(-\alpha)$$

Damit ist der Konvergenzradius des Nebenteils $\exp(\alpha)$ und der des Hauptteils $\exp(-\alpha)$. Also konvergiert die Reihe auf der angegebenen Menge. Auf den Rändern des Ringgebietes konvergiert die Reihe nicht, denn sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \exp(\alpha)$ und betrachte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(\alpha n)}{\exp(\alpha n) + \exp(-\alpha n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \exp(-2\alpha n)}.$$

Die Glieder dieser Reihe bilden keine Nullfolge.

Sei jetzt noch $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \exp(-\alpha)$. Betrachte dann den Hauptteil der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha(-n))}{\exp(\alpha(-n)) + \exp(-\alpha(-n))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \exp(-2\alpha n)}.$$

Auch die Glieder dieser Reihe bilden keine Nullfolge. □

6. **Beh.:** *Sei $a > 0$. Es gilt die Identität:*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi e^{-a}$$

Beweis. Sei $a > 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(ax) = \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}ax) + \exp(-\mathrm{i}ax)) = \mathrm{Re}\,(\exp(\mathrm{i}ax))$$

Da sowohl die Kosinusfunktion als auch $\frac{1}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$ gerade sind, gilt die folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

also

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(\mathrm{i}ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Diese Funktion hat zwei Polstellen, bei i und bei $-$i. Wähle $R > 2$. Sei $\gamma_R : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch:

$$\gamma_R(t) := R\,\exp(\mathrm{i}t\pi)$$

Dann gilt mit dem Residuensatz:

$$\int_{-R}^{R} \frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\,(z>0)} \mathrm{Res}_z\left(\frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\right) = -\int_{\gamma_R} \frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

Wir wollen nun das Integral auf der rechten Seite abschätzen. Für $|\zeta| \geq R$ existiert ein $C > 0$, so daß

$$\left|\frac{1}{1+\zeta^2}\right| \leq C\,|\zeta|^{-2} \leq CR^{-2}$$

gilt. Außerdem gilt

$$|\exp(\mathrm{i}a\gamma_R(t))| \leq 1$$

da $a > 0$. Damit erhalten wir

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq CR^{-2}\,\pi R = C\pi\,R^{-1}.$$

Also

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Es bleibt noch das Residuum an der Stelle i zu berechnen:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\right) = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\exp(-a)$$

Damit gilt für das uns interessierende Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{\exp(\mathrm{i}a\zeta)}{1+\zeta^2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\exp(-a)$$

□