Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 10

1. (a) Betrachte die Funktion $h := f^{-1}g \in Aut(\mathbb{E})$ die jetzt $h(0) = 0$ erfüllt. Damit ist $h(z) = e^{i\theta}z$ nach dem Satz über die Gestalt der Automorphismen von $\mathbb{E}$. Also gilt

$$g(z) = f(e^{i\theta}z)$$

Differenzieren gibt:

$$g'(z) = f'(e^{i\theta}z)e^{i\theta}$$

Nun sind f, g Automorphismen und damit ist $f'(0) = g'(0) \neq 0$. Es folgt dann $f'(0) = g'(0) = f'(0)e^{i\theta}$ also muss $\theta = 0$ sein. Damit ist wie behauptet $f = g$.

(b) Genauso wie oben: Betrachte $h = f^{-1}g \in Aut(\mathbb{E})$. Dann hat h zwei verschiedene Fixpunkte $h(a) = a$ und $h(b) = b$. Betrachte nun den Automorphismus $\phi(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in Aut(\mathbb{E})$ und die Komposition

$$k = \phi^{-1}h\phi \in Aut(\mathbb{E})$$

dann gilt $k(0) = \phi^{-1}h(a) = \phi^{-1}(a) = 0$ und deshalb wie zuvor $k(z) = e^{i\theta}z$. Aber k hat einen weiteren Fixpunkt $c := \phi^{-1}(b) \neq 0$:

$$k(\phi^{-1}(b)) = \phi^{-1}h(b) = \phi^{-1}(b)$$

Deshalb also $c = k(c) = ce^{i\theta}$ und damit $\theta = 0$ und $k = id$. Damit ist aber auch $h = id$ und $g = f$ wie behauptet.

2. Zuerst zeigen wir, dass F abgeschlossen ist. Also sei $f_n \in F$ eine kompakt konvergente Folge. Nach dem Weierstrassschen Konvergenzsatz ist der Grenzwert f wieder eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Da aber $f_n(z) \mapsto f(z)$ punktweise für alle $z \in U$ und $|f_n(z)| \leq |g(z)|$ folgt, dass $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in U$. Damit ist also $f \in F$ und F ist abgeschlossen. Nun verwenden wir, dass für kompaktes $K \subset U$ eine stetige Funktion ihr Maximum annimmt: $M_K := \sup_{z\in K} |g(z)|$ und deshalb gilt

$$\sup_{f\in F} \|f\|_K \leq M_K$$

und damit ist die Familie F beschränkt. Die Kompaktheit von F folgt jetzt aus dem Satz von Montel (in der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Satz von Montel genau $Heine - Borel$ für $\mathcal{O}(U)$ ist, dass also die abgeschlossenen beschränkten Mengen genau die kompakten sind).

Bitte wenden!

3. (a) Sei $\epsilon = \frac{1}{n}$ dann existiert eine Folge von holomorphen (also insbesonderen stetigen) Funktionen g_n, die auf K gleichmässig gegen f konvergieren. Aus der reellen Analysis folgt nun, dass der Grenzwert einer gleichmässig konvergenten Folge von stetigen Funktionen wieder stetig ist. Auf der Menge U der inneren Punkte von K, konvergiert nun die Folge g_n kompakt gegen f. Damit folgt nach dem Weierstrassschen Konvergenzsatz, dass der Grenzwert f auf U holomorph ist.

   (b) Als Gegenbeispiel betrachte folgende Menge: Sei $K = \overline{D(0,1)} \cup \overline{A(2,3)}$ wobei $\overline{A(2,3)} = \{z \in \mathbb{C} | 2 \leq |z| \leq 3\}$ und $f\colon K \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(z) = \begin{cases} 1 & z \in \overline{D(0,1)} \\ 0 & z \in \overline{A(2,3)} \end{cases}$$

   dann ist f stetig auf K und holomorph auf den inneren Punkten von K. Annahme: Es sei g eine ganze Funktion, die f wie in (t) approximiere für $\epsilon = \frac{1}{2}$, also $\|g - f\|_K < \frac{1}{2}$. Also gilt

$$\sup_{|z|=2,5} |g(z)| = \sup_{|z|=2,5} |g(z) - f(z)| < \frac{1}{2}$$

   Nach dem Maximumprinzip gilt jetzt $|g(0)| < \frac{1}{2}$. Aber dann ist wegen $|f(0)| - |g(0)| \leq |g(0) - f(0)| < \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = |f(0)| - \frac{1}{2} < |g(0)| < \frac{1}{2}$$

   Widerspruch.

4. (a) Wir nehmen an $\sup_{f\in F} |f'(a)|$ sei nicht endlich, dann gibt es eine Folge f_n von Funktionen in F mit $|f_n'(a)| > n$. Jetzt ist aber $|f(z)| < 1 \; \forall f \in F, z \in G$ da das Bild von allen f in $\mathbb{E}$ landet. Also ist F beschränkt (für alle $K \subset G$ kompakt ist $|f|_K < 1$) und nach dem Satz von Montel hat f_n eine kompakt konvergente Teilfolge f_{n_j}. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstrass ist nun die Grenzfunktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ dieser Teilfolge holomorph. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstrass konvergieren aber auch die Ableitungen der Folge gegen die Ableitung des Grenzwerts, also auch $|f_{n_j}'(a)| \to |f'(a)|$ mit $|f'(a)|$ endlich. Widerspruch.

   (b) Genauso sei jetzt g_n eine Folge in F, die gegen das Supremum der Ableitungen in F an der Stelle a konvergiert, dann ist entweder $\sup_{f\in F} |f'(a)| = 0$ und die Nullfunktion nimmt das Supremum an, oder aber $\sup_{f\in F} |f'(a)| = c > 0$. Wegen der Beschränktheit von F hat wie oben g_n eine kompakt konvergente Teilfolge $g_{n_j} \to g$ nach dem Satz von Montel. Wie zuvor konvergiert $g_{n_j}(z)$ punktweise gegen $g(z)$ für alle $z \in G$. Da nun aber $|g_{n_j}(z)| < 1$ für alle $z \in G$ gilt ist $|g(z)| \leq 1$, also $f\colon G \to \overline{\mathbb{E}}$. Nach dem Offenheitssatz ist nun entweder $f(G)$ ein Punkt oder offen in $\overline{\mathbb{E}}$. Aufgrund unserer Annahme ist aber g_{n_j} nicht konstant (die Ableitung an der Stelle $a \in G$ hat Betrag $> \frac{c}{2}$ für n gross genug). Da nach Weierstrass die Ableitung der Grenzfunktion gleich dem Grenzwert der Ableitungen der Folge ist, ist auch g nicht konstant. Wenn g also nicht konstant ist gilt $g(G) \subset \mathbb{E}$, der grössten offenen Menge in $\overline{\mathbb{E}}$ und damit ist $g \in F$. Da aber der Grenzwert der Teilfolge auch c ist, ist $|g'(a)| = c$ und es existiert ein Element g in F das das Supremum erreicht.

   (c) Wir setzen $g(a) = b$, dann betrachten wir die Funktion $\phi_b \circ g\colon G \to \mathbb{E}$ mit $\phi_b(z) = \frac{z-b}{\bar{b}z-1} \in Aut(\mathbb{E})$ also $\phi_b \circ g \in F$. Dann ist $\phi_b \circ g(a) = 0$ und es gilt $|(\phi_b \circ g)'(a)| = |\phi_b'(b)||g'(a)|$. Damit muss aber $|\phi_b'(b)| < 1$. Jetzt ist aber $|\phi_b'(b)| = \frac{1}{1-b\bar{b}}$ und deshalb ist $b = 0$ (sonst wäre $|\phi_b'(b)| > 1$). Deshalb erfüllt g bereits die Bedingung $g(a) = 0$!

5. Nach Voraussetzung ist g in G_+ holomorph. Eine reelle differenzierbare Funktion ist genau dann komplex differenzierbar, wenn die CR-Gleichungen gelten. Da g auf G_- die Zusammensetzungen $g = cfc$ mit c der komplexen Konjugation ist und c reell differenzierbar ist, ist auch g reell differenzierbar. Explizit mit $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ folgt somit für g auf G_-:

$$g(x, y) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = u(x, -y) - iv(x, -y)$$

und somit ist
$\tilde{u}_x(x, y) = u_x(x, -y)$; $\tilde{u}_y(x, y) = -u_y(x, -y)$
$\tilde{v}_x(x, y) = -v_x(x, -y)$; $\tilde{v}_y(x, y) = -(-v_y(x, -y))$
deshalb also

$$\tilde{u}_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = \tilde{v}_y(x, y)$$

$$\tilde{u}_y(x, y) = -u_y(x, -y) = -(-v_x(x, -y)) = -\tilde{v}_x(x, y)$$

und damit sind die CR-Gleichungen auf G_- erfüllt und g ist auf G_- holomorph. g ist offensichtlich auch stetig in G, da für jede Folge $z_n \in G_-$ mit $z_n \to r \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ gilt: $g(z_n) = c(f(\bar{z_n})) \to c(f(r)) = g(r)$ für $n \to \infty$ wegen der Stetigkeit von f. Nun können wir aber die Übungsaufgabe 2 auf Blatt 5 verwenden. Diese besagt, dass eine Funktion g die in einem Gebiet G stetig und ausserhalb einer Geraden holomorph ist die Eigenschaft hat, dass das Integral um jedes ganz in G gelegene Dreieck verschwindet (Erinnerung: Dazu zerlegt man die Dreiecke entlang der Geraden und schätzt die resultierenden Integrale ab. Für mehr Details siehe Aufgabe 2 Blatt 5). Damit ist also g holomorph auf ganz G nach dem Satz von Morera.

6. Wir setzen $f_s(z) = \frac{sin^2(z-1)}{(z-s)(z-\frac{1}{s})}$. Zuerst sehen wir, dass

$$f_1(z) = \frac{sin^2(z-1)}{(z-1)^2}$$

bei 1 eine hebbare Singularität besitzt. Das sieht man beispielsweise, wenn man die Potenzreihenentwicklung

$$sin(z-1) = (z-1) - \frac{(z-1)^3}{3!} + ..$$

hinschreibt und dann das Cauchy-produkt für das Quadrat berechnet: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ damit ist also $c_0 = 0; c_1 = 2a_1 a_0 = 0; c_2 = a_1^2 + 2a_0 a_2 = 1$. Daher sieht man, dass die Potenzreihenentwicklung von $sin^2(z-1)$ mit $sin^2(z-1) = (z-1)^2 + c_3(z-1)^3 + ...$ beginnt. Es ist also für $z \neq 1$

$$\frac{sin^2(z-1}{(z-1)^2}$$

durch die Potenzreihe

$$1 + c_3(z-1) + ...$$

gegeben. Diese Reihe definiert aber auch eine holomorphe Funktion in $z = 1$ mit Funktionswert 1 an dieser Stelle. Das sei die holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f_1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in den Punkt $z = 1$. Nun definieren wir $\phi(1) := \int_\gamma \widetilde{f_1} dz$. Dieses Integral verschwindet da $\widetilde{f_1}$ holomorph in dem Sterngebiet $\mathbb{C}$ ist und $\gamma \subset \mathbb{C}$ (das Verschwinden des Integrals folgt dann nach dem Integralsatz von Cauchy). Es genügt desweiteren $0 < s < 1$ zu betrachten, denn $\phi(\frac{1}{s}) = \phi(s)$. Dann liegt die Singularität s im Inneren der Einheitskreisscheibe, $\frac{1}{s}$ aber ausserhalb. Also ist $g_s(z) = \frac{sin^2(z-1)}{z-\frac{1}{s}}$ holomorph in $\mathbb{E}$ und damit folgt nach der Cauchy-Integralformel

$$g_s(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g_s(z)}{z-s} dz$$

Es gilt also $\phi(s) = 2\pi i g_s(s) = 2\pi i \frac{sin^2(s-1)}{s-\frac{1}{s}}$. Als Zusammensetzung stetiger Funktionen ist somit ϕ stetig für alle $s \neq 1 \in (0,\infty)$. Wir müssen jetzt noch den Grenzwert für $s \to 1; s < 1$ betrachten. Wir betrachten nur den reellen Grenzwert

$$\lim_{s<1\to 1} \frac{sin^2(s-1)}{s-\frac{1}{s}}$$

Nach L'Hospital folgt jetzt, dass

$$\lim_{s<1\to 1} \frac{sin^2(s-1)}{s-\frac{1}{s}} = \lim_{s<1\to 1} \frac{2sin(s-1)cos(s-1)}{1+\frac{1}{s^2}} = 0$$

und damit ist die Stetigkeit von ϕ gezeigt (Erinnerung: $\phi(s) = \phi(\frac{1}{s})$ deshalb brauchen wir den anderen Grenzwert nicht zu berechnen!).