Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Übungsblatt 1

1. (a) Sei

$$\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathcal{C}$$
$$x+iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

dann ist α offensichtlich bijektiv und linear.

$$\alpha(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist das multiplikativ neutrale Element in $\mathcal{C}$ und

$$\alpha(zw) = \alpha(xu - yv + i(xv + yu)) = \begin{pmatrix} xu - yv & -(xv + yu) \\ xv + yu & xu - yv \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \alpha(z)\alpha(w)$$

für $z = x + iy$; $w = u + iv$ Damit ist α ein Ring Isomorphismus (alle relevanten Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften für $\mathbb{C}$ und der Erhaltung der Multiplikation durch α). Da aber $\mathbb{C}$ ein Körper ist (siehe Vorlesung), ist auch $\mathcal{C}$ ein Körper und α ist ein Körperisomorphismus. Tatsächlich gilt (z.B.): Sei $A \in \mathcal{C}$ nicht 0, dann existiert ein a mit $\alpha(a) = A$, nun ist a nicht Null und somit existiert ein $\overline{a} \in \mathbb{C}$ mit $a\overline{a} = 1$ deshalb ist $\alpha(\overline{a})$ nicht Null und ist das multiplikative Inverse zu A.

(b) Nach der Erklärung gilt $T^n - (-T^{n-2}) = (T^2+1)T^{n-2}-$ und damit sind T^n und $-T^{n-2}$ in derselben Äquivalenzklasse im Restklassenring $\mathbb{R}[T]/(T^2+1)$. Alle Potenzen lassen sich also bis auf ein Vorzeichen reduzieren auf 1 oder T. Somit hat jede Äquivalenzklasse in $\mathbb{R}[T]/(T^2+1)$ einen eindeutigen Repräsentanten der Form $a+bT$. Wir definieren wie zuvor

$$\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}[T]/(T^2+1)$$
$$x+iy \mapsto x + yT$$

dann ist β offensichtlich bijektiv und linear. Auch gilt $\beta(1) = 1$. Nun gilt ausserdem

$$(a+bT)(c+dT) = ac+adT+bcT+bdT^2 = ac+(ad+bc)T+bd(T^2+1)-bd = ac-bd+(ad+bc)T$$

und damit ist β auch ein Ring Isomorphismus(siehe oben) was wie zuvor bedeutet, dass β ein Körperisomorphismus ist.

Bitte wenden!

2. Seien a, b zwei verschiedene komplexe Zahlen und c eine positive reelle Zahl. Beschreiben Sie (mit Beweis!) den geometrischen Ort aller komplexer Zahlen, die die folgende Gleichung erfüllen:

   (a) Es folgt

$$\frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}{(z-b)(\overline{z}-\overline{b})} = c^2$$

   und damit

$$z\bar{z}(1-c^2) - z(\bar{a} - \bar{b}c^2) - \bar{z}(a - bc^2) + a\bar{a} - b\bar{b}c^2 = 0$$

   sei nun $c = 1$ dann reduziert sich die Gleichung auf

$$z(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{z}(a - b) = a\bar{a} - a\bar{b}$$

   Das ist aber die Gleichung einer Geraden in $\mathbb{C}$. Explizit sieht man das, wenn man zu Vektoren übergeht. Schreibe $a - b = \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$; $z = x + iy$; $a\bar{a} - b\bar{b} = r$ und es gilt

$$(x + iy)(\alpha_1 - i\alpha_2) + (x - iy)(\alpha_1 + i\alpha_2) = r$$

   vereinfacht sich zu

$$2(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = r$$

   also $< z, a-b >= \frac{r}{2}$ wobei $<, >$ das standard Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ bedeute. Dies ist eine affine Gerade senkrecht zu $a - b$. Da $\frac{a+b}{2}$ eine Lösung der Gleichung ist, ist der gesuchte geometrische Ort die Mittelsenkrechte der Strecke zwischen a und b. Falls $c \neq 1$ erhalten wir einen Kreis. Dazu beachte: Offensichtlich beschreibt die Gleichung $|z - a| = r$ einen Kreis in $\mathbb{C}$ um a mit Radius r. Also wie zuvor

$$r^2 = (z-a)(\bar{z} - \bar{a}) = z\bar{z} - z\bar{a} - \bar{z}a + a\bar{a}$$

   Daher sehen wir das die Gleichung

$$z\bar{z} - z\bar{a} - \bar{z}a + a\bar{a} - r^2 = 0$$

   einen Kreis in $\mathbb{C}$ beschreibt. Durch quadratische Ergänzung führen wir die obige Gleichung in eine Kreisgleichung über, da wir nun durch $(1 - c^2)$ teilen dürfen. Dies gibt

$$z\bar{z} - z\frac{\bar{a} - \bar{b}c^2}{1-c^2} - \bar{z}\frac{a - bc^2}{1-c^2} + \frac{a\bar{a} - b\bar{b}}{1-c^2} = 0$$

   und somit nach einigen Manipulationen (quadratische Ergänzung) für $\alpha := \frac{a-c^2b}{1-c^2}$ die Kreisgleichung:

$$z\bar{z} - z\bar{\alpha} - \bar{z}\alpha + \alpha\bar{\alpha} = \frac{c^2(a-b)(\bar{a} - \bar{b})}{1-c^2}$$

   also einen Kreis mit Mittelpkt α und Radius $\frac{c|a-b|}{\sqrt{1-c^2}}$.

   (b) Zuerst wollen wir zeigen, dass

$$arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

   den negative orientierten Winkel bei z beschreibt unter dem a und b erscheinen. Aus der Vorlesung wissen wir für zwei komplexe Zahlen $w_0, w_1 \neq 0$ existiert ein eindeutiger Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$ (der Winkel bei 0 unter dem w_0, w_1 erscheinen, oder anders ausgedrückt der Winkel zwischen w_0 und w_1), so dass

$$\cos\alpha = \frac{< w_0, w_1 >}{|w_0||w_1|}; \ \sin\alpha = \frac{< iw_0, w_1 >}{|w_0||w_1|}$$

gilt. Nun sei $z \neq a, b$ dann gilt aber

$$\frac{a-z}{b-z} = \left|\frac{a-z}{b-z}\right| (cos\alpha - i\sin\alpha)$$

da

$$\left|\frac{a-z}{b-z}\right| \left(\frac{< a-z, b-z >}{|a-z||b-z|} - i\frac{< i(a-z), (b-z) >}{|a-z||b-z|}\right) =$$

$$= \frac{1}{(b-z)\overline{(b-z)}} \left(\frac{1}{2}\left(\overline{(a-z)}(b-z) + (a-z)\overline{(b-z)} - i\left(i(a-z)\overline{(b-z)} + (b-z)\overline{i(a-z)}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{(b-z)\overline{b-z}} \left(\frac{1}{2}(2(a-z)\overline{(b-z)}\right) = \frac{a-z}{b-z}$$

Damit nach der Definition von arg ist $\alpha = 2\pi - arg\left(\frac{a-z}{b-z}\right)$ wie behauptet. Der geometrische Ort aller Punkte unter denen zwei vorgegebene Punkte a, b unter einem festen Winkel α erscheinen ist der Fasskreisbogen zum Winkel α durch a, b. Er wird konstruiert indem man die Mittelsenkrechte zur Strecke $[a, b]$ konstruiert, bei a den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ gegen $[a, b]$ anträgt und den Schenkel des Winkels verlängert bis er die Mittelsenkrechte schneidet. Vom Schnittpunkt schlägt man einen Kreis durch a. Der Fasskreisbogen ist der Teil des Kreisbogens der auf der Seite des Mittelpunktes bezüglich der Sekanten durch a, b liegt. Zum Beweis, dass der geometrische Ort genau der Fasskreisbogen ist verwendet man die Tatsache (mit sehr einfachem Beweis), dass sich gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck zu π ergänzen. Nun startet man mit dem Sehnenviereck das sich durch a, b und die Schnittpkte der Mittelsenkrechten mit dem oben konstruierten Kreis definiert. Dann hat der Winkel bei dem einen der Schnittpunkte den Wert α und Variation dieses Punktes auf dem Kreisbogen zeigt durch die Eigenschaft des Sehnenvierecks, dass sich der Winkel an dem bewegten Punkt nicht ändert. Mit elementarer Winkelgeometrie zeigt man nun, dass alle anderen Punkte in der Ebene, andere Winkel (beachte Orientierung!) mit a, b einschliessen. Im Spezialfall $\alpha = 0$ ergibt sich die Gerade durch a, b als Lösung, da nun $z - a, z - b$ linear abhängig sind.

3. Auf dem Präsenzblatt haben wir gezeigt, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ (aufgefasst als 2x2 Matrix) ist genau dann komlex linear, wenn sie von der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist. Aus der Definition der komplexen Differenzierbarkeit (vgl. Aufgabe 4) sieht man, dass komplex differenzierbar heisst, dass das Differential von f Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(a)$ bedeutet. Im Besonderen ist das Differential also komplex linear und damit muss die Jacobi-Matrix von dieser Form sein. Umgekehrt ist die Jacobi-matrix genau dann eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn sie von dieser Form ist und damit ist f komplex differenzierbar. Alle drei Funktionen haben stetige partielle Ableitungen nach x, y, deshalb sind sie reell differenzierbar. In diesem Falle entscheidet die Form der Matrix wie oben über die komplexe Differenzierbarkeit. Also

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1;$ aber $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ deshalb ist f nirgends kom. diff.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y; -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ deshalb ist f nur in 0 kom. diff.

(c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2$; $\frac{\partial v}{\partial y} = x^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0; -\frac{\partial v}{\partial x} = -2xy$ nur für $x = 0$ sind die CR-Gl. erfllt, deshalb ist f auf der imaginären Achse kom.diff. Im Besonderen ist keine der drei Funktionen in irgendeinem Punkt holomorph.

Eine andere Methode ist mittels des Differenzenquotienten.

(a) Dazu betrachte die beiden Folgen $h_n^1 = \frac{1}{n}$; $h_n^2 = \frac{i}{n}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z + h_n^1) - f(z)}{h_n^1} = 1; \; lim_{n\to\infty} \frac{f(z + h_n^2) - f(z)}{h_n^2} = -i$$

deshalb ist f nirgens komplex diff.

(b) Es gilt $f(z) = z\bar{z}$. Deshalb

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z + h)(\bar{z} + \bar{h}) - z\bar{z}}{h} = \lim_{h\to 0} z + \bar{z}\frac{\bar{h}}{h} + \bar{h}$$

Nimmt man die beiden Folgen oben, dann sieht man, dass der Limes nicht existiert für $z \neq 0$. Aber für $z = 0$ ist der limes 0 und existiert somit. f ist also komplex diff. in 0.

(c) Betrachte die beiden Folgen wie oben. Damit folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z + h_n^1) - f(z)}{h_n^1} = 3x^2 + i2xy; \; \lim_{n\to\infty} \frac{f(z + h_n^2) - f(z)}{h_n^2} = x^2$$

also kann f nur für $x = 0$ kom.diff.sein. Nun sei $x = 0$ und $h = h_1 + ih_2$ beliebig, dann gilt

$$\frac{f(iy + h) - f(iy)}{h} = \frac{h_1^2 iy}{h} + h_1^2$$

Der zweite Term geht offensichtlich gegen Null, wenn h gegen Null geht. Für den ersten bemerke man, dass

$$\frac{h_1^2}{h} = \frac{\frac{1}{4}(h + \bar{h})^2}{h} = \frac{1}{4}(h + 2\bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{h})$$

Da aber $\|h| = |\bar{h}|$ gilt geht der Betrag der komplexen Zahl $\frac{\bar{h}^2}{h}$ gegen Null, wenn h gegen Null geht. Also geht auch die Zahl gegen Null. Damit existiert der Limes und ist gleich 0 auf der imaginären Achse, also ist f dort komplex diff.bar.

4. $a \iff b$ Erster Teil: Es existiere der Grenzwert

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = l$$

dann definiert man eine Funktion ϕ durch

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \text{ für } z \neq a \\ l \text{ für } \; z = a \end{cases}$$

ϕ ist dann stetig in a, da für jede Folge $z_n \to a$ wenn $n \to \infty$ wegen der Existenz des Grenzwertes oben $\phi(z_n) \to l = \phi(a)$ gilt. Sei $z \neq a$, dann gilt auch

$$f(z) = f(a) + \phi(z)(z - a) = f(a) + \frac{f(z) - f(a)}{z - a}(z - a) = f(z)$$

in $z = a$ ist die Gleichung trivialerweise auch erfüllt, da dort der zweite Term verschwindet. Umgekehrt existiere nun ein in a stetiges ϕ, so dass

$$f(z) = f(a) + \phi(z)(z - a)$$

Dann ist ϕ für $z \neq a$ gegeben durch

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Sei nun $z_n \neq a$ eine Folge die gegen a konvergiert, dann konvergiert (wegen der Stetigkeit von ϕ in a) $\phi(z_n)$ gegen l. Also gilt

$$\frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \to l$$

für alle solchen Folgen (z_n). Das aber heisst genau, dass der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert und gleich l ist. Somit ist f in a kom. diff.
$b \iff c$ Erster Teil (b ist gegeben): Dann schreibe

$$\rho(z) = \phi(z) - l$$

und es gilt die gewünschte Gleichung mit ρ stetig in a und $\rho(a) = 0$. Umgekehrt definiere man $\phi(z) := \rho(z) + l$, dann ist ϕ stetig in a und es gilt die gewünschte Gleichung in b.) mit $\phi(a) = l$.
$c \iff d$ Erster Teil (c ist gegeben): Definiere $r(z) = \rho(z)(z - a)$ und somit gilt

$$f(z) = f(a) + l(z - a) + r(z)$$

mit

$$\lim_{z \to a; z \neq a} \frac{r(z)}{z - a} = \lim_{z \to a} \rho(z) = 0$$

da ρ in a steig mit Wert 0 ist. Umgekehrt definiere man ρ durch:

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{r(z)}{z-a} \text{ für } z \neq a \\ \\ 0 \text{ für } \ z = a \end{cases}$$

dann gilt $f(z) = f(a) + l(z - a) + r(z) = f(a) + l(z - a) + \rho(z)(z - a)$ und die Existenz von

$$\lim_{z \to a; z \neq a} \frac{r(z)}{z - a} = 0$$

zeigt wie zuvor die Stetigkeit von ρ in a.

5. (a)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z_0^2 + 2hz_0 + h^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2z_0 + h = 2z_0$$

(b)

$$z^2 = (z_0 + z - z_0)^2 = z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2 = z_0^2 + (2z_0 + z - z_0)(z - z_0) = z_0^2 + (z_0 + z)(z - z_0)$$

also ist $f(z) = f(z_0) + \phi(z)(z - z_0)$ mit $\phi(z) = (z_0 + z)$ (und dort stetig).

(c) wie zuvor

$$z^2 = z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)(z - z_0)$$

also gilt $f(z) = f(z_0) + l(z - z_0) + \rho(z)(z - z_0)$ mit $l = 2z_0$ und $\rho(z) = z - z_0$

(d) wie zuvor

$$z^2 = z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2$$

also gilt $f(z) = f(z_0) + l(z - z_0) + r(z)$ mit $r(z) = (z - z_0)^2$

6. Schreibe

$$(f(z+h) - f(z))(f(z+h) + f(z)) = (f(z+h))^2 - (f(z))^2 = z + h - z = h$$

nun falls $f(z) = 0$ für $z \in U$ dann folgt $z = f(z)^2 = 0 \in U$ was nicht so ist. Also ist $f(z) = a \neq 0$ und somit existiert wegen der Stetigkeit von f und der Offenheit von U eine Scheibe $D(z, \delta) \subset U$ so dass für alle $w \in D(z, \delta)$ gilt $|f(w) + f(z)| > 0$. Nun sei $0 < |h| < \delta$ dann gilt aber wegen der obigen Gleichung und der Stetigkeit von f

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(z+h) + f(z)} = \frac{1}{2f(z)}$$

Damit existiert der Grenzwert und f ist kom. diff. bei z.