

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 9

1. Sei $\sum f_n$ normal konvergent in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeige, dass

$$p := \prod_{n=n_0}^{\infty} (1 + f_n)$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion definiert. (Hinweis: Zeige $\prod_{n=n_0}^m (1 + f_n)$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen p). Man zeige weiterhin:

$$\frac{p'}{p} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f'_n}{1 + f_n},$$

wenn p nicht die Nullfunktion ist. In $\{z \in G \mid p(z) \neq 0\}$ ist die Konvergenz normal.

2. Sei $\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Die kompakte Konvergenz des Integrals in $\mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ sei vorausgesetzt.
- (a) Zeigen Sie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\forall z \in \mathbb{H}_0$.
 - (b) Zeigen Sie $\Gamma(1) = 1$ und damit $\Gamma(n+1) = n!$.
 - (c) Beweisen Sie, dass

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

und dass dies eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ liefert.

- (d) Zeigen Sie

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = (-1)^n \frac{1}{n!}$$

3. Sei $T_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]1-\epsilon, 2[\}$ und sei $f : T_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

- (i) $\|f\|_{T_\epsilon} < \infty$
- (ii) $f(z+1) = zf(z) \quad \forall z \in T_\epsilon, \text{ mit } z+1 \in T_\epsilon$

Zeigen Sie nun, dass f eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ hat und $f = f(1)\Gamma$.

4. (a) Zeigen Sie, dass

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion definiert (Hinweis: Zeigen Sie die normale Konvergenz von $\sum \left((1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}} - 1\right)$).

(b) Zeigen Sie, dass

$$ze^{\gamma_E z} h(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} z n^{-z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right), \quad \text{wobei} \quad \gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

und

$$ze^{\gamma_E z} h(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1) \cdots (z+n)$$

(c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(z) = (ze^{\gamma_E z} h(z))^{-1}$ und verwenden Sie dies, um eine Produktdarstellung von $\Gamma(z)$ zu erhalten.

5. (a) Beweisen Sie, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right)$$

gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion s konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = s(z)$$

(Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Funktion und wenden Sie darauf Liouville an.)

6. Sei U in $\mathbb{C}$ offen und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U , das heißt: $K_n \subset U$ ist kompakt, $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ und $\bigcup K_n = U$. Man zeige, dass

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}$$

eine Metrik auf $\mathcal{O}(U)$ ist, welche die Topologie der kompakten Konvergenz induziert.

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten 4 Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte)
- Lösungen zu diesen Aufgaben können bis **Montag den 29. Juni 14:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe**
- **Bitte beachten Sie: Lösungsblätter mit mehr als einem Namen werden nicht mehr bewertet.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**