

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Übungen zur Funktionentheorie Übungsblatt 8

1. Seien $a, b > 0$ und der stetig differenzierbare Weg $\gamma(t) := a \cos t + i b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ gegeben.

(a) Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{|z|=a} \frac{dz}{z}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Identität:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{D(0, r)} \subset G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D(0, r)$. Zeigen Sie:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, r)} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z} \frac{z + z_0}{z - z_0} dz + i \operatorname{Im} f(0).$$

Leiten Sie damit die *Poisson-Integralformel* für harmonische Funktionen ab: Ist $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, dann gilt für $z_0 \in D(0, r)$:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \frac{r^2 - |z_0|^2}{|re^{it} - z_0|^2} dt.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{z} \frac{z+z_0}{z-z_0} = \frac{2}{z-z_0} - \frac{1}{z}$. Benutzen Sie nun Aufgabe (5.b) von Übungsblatt 7.

3. Zeigen Sie: Das Bild einer nichtkonstanten ganzen Funktion ist dicht in \mathbb{C} .

Hinweis: Angenommen es gilt $f \cap D(a, r) = \emptyset$ für eine ganze Funktion f . Betrachte nun die Funktion $z \mapsto (f(z) - a)^{-1}$.

- Bitte wählen Sie 2 der 3 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 2 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten zwei Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte).
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 22. Juni 14:00h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.**
- **Bitte beachten Sie: Lösungsblätter mit mehr als einem Namen werden nicht mehr bewertet.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**