

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Pleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 7

1. Betrachte $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{**} \cup \mathbb{C}_+$ mit $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \geq 0\}$, also die negativ und positiv geschlitzte Ebene. Auf $\mathbb{C}^{**}$ ist der Hauptzweig $\text{Log}_0(z)$ des Logarithmus definiert (wie in der Vorlesung) und auf $\mathbb{C}_+$ ist der Logarithmus $L(z) = \log|z| + i\arg_+(z)$ mit $\arg_+(z) \in [0, 2\pi[$, so dass $z = |z|(\cos(\arg_+(z)) + i\sin(\arg_+(z)))$ ist, definiert. Überprüfe, dass Log_0 und L auf der oberen Halbebene übereinstimmen, sich auf der unteren Halbebene aber um $2\pi i$ unterscheiden. Warum müssen sie nach dem Identitätssatz nicht überall übereinstimmen?

Bemerkung: Ausführliche Begründung!

2. Berechne das Integral

$$\int_{\alpha} \frac{1}{1-z^2} dz$$

für

- (a) α die Figur-Acht Kontur aus dem Präsenzblatt 5.
(b) α das achsenparallele Quadrat mit Seitenlänge 2 und Mittelpunkt 1 gegen den Uhrzeigersinn.
3. Als Verallgemeinerung des Satzes von Liouville zeige man, dass jede ganze Funktion f , zu der es $M, R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq M|z|^n$$

ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass sich die k -te Ableitung durch

$$|f^{(k)}(0)| \leq Mr^{n-k}$$

für grosse r unabhängig von r abschätzen lässt.

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ und $h: G \rightarrow \mathbb{C}$ seien stetig reell differenzierbar und verschwinden nicht identisch. Es gelte

- (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = fh$
(b) $\frac{\partial f}{\partial y} = ifh$

auf G . Zeige, dass f, h holomorph auf G sind.

5. Es sei f eine Funktion, die in einer Umgebung von $\overline{D(0, r)}$, $r > 0$ holomorph ist. Zeige

Bitte wenden!

(a)

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{z}} d\zeta$$

für alle $z \in D(0, r)$

(b)

$$\bar{f}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{\bar{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in D(0, r)$

Hinweis: Zur ersten Teilaufgabe berechne man $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} + g(\zeta) \right) d\zeta$ mit $g(\zeta) := \frac{\bar{z}f(\zeta)}{r^2 - \bar{z}\zeta}$. Für die zweite darf $\overline{\int_a^b g(t)dt} = \int_a^b \bar{g}(t)dt$ verwendet werden. Für eine Funktion f sei, $\bar{f} = c \circ f$ mit $c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$ der komplexen Konjugation.

6. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Zeige

- (a) Eine in $\bar{G}$ stetige und in G holomorphe Funktion nimmt ihr Betragsmaximum auf dem Rand von G an.
- (b) Eine holomorphe Funktion f auf G die “bei Annäherung an den Rand von G gleichmässig gegen 0 strebt”, ist bereits die Nullfunktion. Präzisiert bedeutet die Bedingung oben, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in G$ mit $d(z, \partial G) < \delta$ stets $|f(z)| < \epsilon$ gilt.

Bemerkung: $\bar{G}$ bezeichnet den Abschluss von G , $\partial G := \bar{G} \setminus G$, den Rand von G und $d(z, \partial G)$ den Abstand von z vom Rand von G .

Hinweis: In der zweiten Teilaufgabe ist die Funktion f auf dem Rand noch nicht definiert!

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben werden nur die ersten vier korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte)
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 15. Juni 14:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**