

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
A. Stadelmaier
M. Schwingenheuer

Übungen zur Funktionentheorie Übungsblatt 6

1. Gegeben sei folgende konforme Abbildung

$$f : z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1)$$

Diese wird auch Joukowski Abbildung genannt und ist in der Aerodynamik wichtig. Diese konforme Abbildung wurde verwendet, um Tragflächenprofile zu modellieren, und es sollen im Folgenden die Bilder von Kreislinien unter f skizziert werden. Zeichnen Sie dazu die Bilder unter f der Kreise, welche durch i verlaufen und als Mittelpunkt

- (a) den Ursprung
- (b) die komplexe Zahl $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$ und
- (c) $-\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$

besitzen. (*Hinweis:* Ein mögliches Vorgehen ist, die Punkte (exakt oder numerisch) zu bestimmen, in denen die Kurven die Koordinaten-Achsen schneiden, bzw. die Kurven waagerechte oder senkrechte Tangenten besitzen. Gehen die Kurven immer durch den Ursprung?)

2. Man bestimme mit Hilfe des Integralsatzes und der Integralformel von Cauchy das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2 + 1)} dz \quad (2)$$

längs der Kreislinien γ

- (a) um 1 mit Radius $\frac{1}{2}$,
 - (b) um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$,
 - (c) um i mit Radius $\frac{1}{2}$ und
 - (d) um 0 mit Radius 2
3. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Integralsatz und die Integralformel von Cauchy zu nutzen um folgendes Integral zu bestimmen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = c. \quad (3)$$

Sei dazu $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Bestimmen Sie nun das Wegintegral

- (a) längs einer geschlossenen Kreislinie mit kleinem Radius $\epsilon > 0$ um i und
- (b) längs des geschlossenen Weges, welcher durch die Strecke von $-R$ nach $+R$ und den Halbkreisbogen γ_R von R nach $-R$ im Gegenuhrzeigersinn (in der oberen Halbebene) gebildet wird. (Ergebnis: π).
- (c) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

und verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse, um c zu bestimmen.

- Bitte wählen Sie 2 der 3 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 2 vollständig gelöste Aufgaben)
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte).
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 08. Juni 14.00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.**
- **Bitte beachten Sie: Lösungsblätter mit mehr als einem Namen werden nicht mehr bewertet.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**