MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SS 2009

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 5

1. (a) Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$, wobei f und g (reell) partiell differenzierbare Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ seien:

   (i) $\partial(fg) = (\partial f)g + f\partial g$. (ii) $\overline{\partial f} = \bar{\partial}\bar{f}$. (iii) $\bar{\partial}(f \circ g) = ((\partial f) \circ g)\bar{\partial}g + ((\bar{\partial} f) \circ g)\bar{\partial}\bar{g}$.

   (b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $V \subset \mathbb{C}$ eine weitere offene Teilmenge. $f : U \to V$ sei eine konforme und sogar zweimal stetig differenzierbare, surjektive Funktion und $g : V \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

   g ist genau dann harmonisch, wenn $g \circ f$ harmonisch ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel.

2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$. Definiere eine reelle Gerade $G := \{z \in \mathbb{C} | z = rw, r \in \mathbb{R}\}$. Sei weiterhin f holomorph in $U \backslash G$. Seien z_1, z_2, z_3 drei Punkte in U, so daß die von ihnen aufgespannte Dreiecksfläche Δ ganz in U enthalten ist. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \to U$ ein stückweise einmal stetig differenzierbarer Weg. Sei $\gamma^{-1} : [a, b] \to U$, $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a + b - t)$. Sei ferner $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

   (a) Beweisen Sie, daß dann gilt:

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

   (b) Gelte nun für f zusätzlich, daß $|f(z)| \leq C$, $C \in \mathbb{R}^+$ für $z \in \mathrm{Bild}\gamma$. Bezeichne $L(\gamma)$ die Länge des Weges γ. Zeigen Sie:

$$\left| \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z \right| \leq CL(\gamma).$$

   Zur Erinnerung: $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$.

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant.

   (a) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Für $a \in \mathbb{C}$ ist die Menge $G \backslash f^{-1}(a)$ wieder ein Gebiet.

   (b) Zeigen Sie: Das Bild von G unter f besitzt innere Punkte.

Bitte wenden!

5. (a) Sei $Log_0 : \mathbb{C}^{\star\star} \to S$ der Hauptzweig des Logarithmus definiert als Umkehrfunktion von $\exp : S \to \mathbb{C}^{\star\star}$, wobei $S := \{z \in \mathbb{C} | -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Bezeichne $[1, z]$ den geraden Weg von 1 nach z. Sei $L : \mathbb{C}^{\star\star} \to \mathbb{C}$ definiert durch das folgende Integral:

$$L(z) := \int\limits_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

   (i) Zeigen Sie, daß $L = Log_0$ gilt.

   (ii) Sei nun $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(\phi) := \exp(\mathrm{i}\phi)$ ein geschlossener Weg. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

   (b) Betrachten Sie im folgenden den Weg $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := 2(-\sin(t) + \mathrm{i}\sin(2t))$.

   (i) Skizzieren Sie den Weg γ in der komplexen Ebene.

   (ii) Bestimmen Sie den Wert des Wegintegrals:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \,\mathrm{d}\zeta.$$

6. In dieser Aufgabe betrachten wir wieder die Möbiustransformationen. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, mit $c \neq 0$ und $ad - bc \neq 0$, und M die zugehörige *Möbiustransformation*:

$$M \,:\, \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\} \,:\, z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

   (a) Zeigen Sie: Jede Möbiustransformation läßt sich als *Komposition* von Abbildungen der nachfolgenden Art schreiben:

   - Drehstreckung $z \mapsto uz$, $u \in \mathbb{C}^\star$
   - Translation $z \mapsto z + v$, $v \in \mathbb{C}$
   - Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$

   Die Komposition zweier Abb. M_1 und M_2 ist die Abb. $z \mapsto (M_1 \circ M_2)(z) = M_1(M_2(z))$.

   (b) Verwenden Sie Teil (a) um zu zeigen, daß Möbiustransformationen *Doppelverhältnisse* erhalten. Das *Doppelverhältnis* DV der vier Punkte $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sowie $z_0 \neq z_3$ ist definiert durch

$$\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}\,.$$

   Zeigen Sie also, daß für eine Möbiustransformation M mit $z_0, z_1, z_2, z_3 \neq -\frac{d}{c}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{DV}(M(z_0), M(z_1), M(z_2), M(z_3)) = \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten vier Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte).
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Mittwoch den 3. Juni 14:00h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe**.
- **Bitte beachten Sie: Lösungsblätter mit mehr als einem Namen werden nicht mehr bewertet.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen**.