Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 4

1. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ offen und es gilt eine der folgenden Bedingungen
   (a) $Imf = konstant$
   (b) $argf = konstant$
   (c) $|f| = konstant$

   Zeige mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen, dass dann schon folgt, dass f lokal konstant ist.

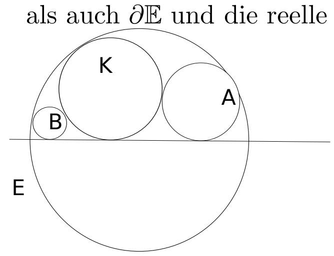
2. Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl, dann betrachten wir zunächst die reelle Funktion
$$\sqrt[k]{.}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
   (a) Zeige: Es gibt eine eindeutige analytische Fortsetzung $W_k\colon \mathbb{C}^{**} \to \mathbb{C}$ (vgl. Vorlesung für k=2) und es darf die Reihenentwicklung $\sqrt[k]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{k}}{n} x^n$ ohne Beweis verwendet werden.
   (b) Beschreibe das Übergangsverhalten der Funktionen W_k^j an der negativen reellen Achse.
   (c) Zeige W_k ist nicht stetig fortsetzbar in einen beliebigen Punkt $x < 0,\ x \in \mathbb{R}$
   (d) Welche anderen analytischen Funktionen $W_k^j\colon \mathbb{C}^{**} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $(W_k^j(z))^k = z$ gibt es?

3. Finde zu den folgenden gegebenen harmonischen Funktionen eine holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit dem gegebenen Realteil u oder beweise, dass eine solche nicht existiert:
   (a) $D = \mathbb{C}$ und $u\colon D \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$
   (b) $D = \mathbb{C}^*$ und $u\colon D \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
   (c) $D = \mathbb{C}^{**}$ und $u\colon D \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$
   (d) $D = \mathbb{C}^*$ und $u\colon D \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = log(x^2+y^2)$

4. (a) Eine Möbius-transformation M ist eine gebrochen rationale Abbildung der Form $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$. Damit ist eine Möbiustransformation eine bijektive konforme Abbildung $M\colon \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Zeige, dass M Kreise auf Kreise oder Geraden abbildet (später werden wir sehen, dass das keinen Unterschied bedeutet wenn wir M als Abbildung der "Riemannschen Zahlenspäre" $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ aufzufassen.)
   Hinweis: So etwas Ähnliches haben wir schon in einer früheren Übungsaufgabe auf Blatt 1 gesehen.

Bitte wenden!

(b) In der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ sei ein beliebiger Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} || z - a| = r; r \neq 0\}$ mit Mittelpunkt in der oberen Halbebene gegeben, der sowohl den Einheitskreis $\partial\mathbb{E}$ als auch die reelle Achse berührt. Finde die Mittelpunkte der Kreise A, B, die sowohl K als auch $\partial\mathbb{E}$ und die reelle Achse berühren.



Hinweis: Finde eine geeignete konforme Abbildung (Möbiustransformation) und zeige mit Hilfe der ersten Teilaufgabe, dass diese konforme Abbildung Kreise erhält.

5. (a) Zeichne das Bild des rechteckigen Koordinatengitters (bestehend aus den waag- und senkrechten Geraden durch alle ganzzahligen Paare (n, m)) unter der analytischen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = z^2$

   (b) Gib zwischen den beiden folgenden gegebenen Gebieten eine biholomorphe Abbildung (konform mit konformer Umkehrung) an:

      i. $\mathbb{E}$, $OH = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0\}$

      ii. $W_{\frac{\pi}{k}} = \left\{z \in \mathbb{C}^* | z = re^{i\theta};\ \theta \in]0, \frac{pi}{k}[\right\}$, $\mathbb{E}$ mit $k \geq 1$ und $k \in \mathbb{N}$

6. Diskutiere die Existenz und Eindeutigkeit einer analytischen Funktion in $\mathbb{E}$ so dass gilt

   (a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$

   (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben werden nur die ersten vier korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte)
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 25. Mai 14:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**