Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
A. Stadelmaier
M. Schwingenheuer

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Übungsblatt 3

1. (a) Man beweise, dass 2π die einzige minimale Periode von $\sin z$ und $\cos z$ ist. Schließen Sie nun auf die Nullstellen von $\sin z$ und $\cos z$.

   (b) Man schließe auf die Perioden von $\tan z$ und $\cot z$. Ist $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv?

   (c) Berechnen Sie die minimale Periode von $|\sin z|^2$ und weisen Sie nach, dass es die einzige ist.

   (d) Fertigen Sie ein Höhenprofil von $|\sin z|^2$ an. Zeichnen Sie dazu die Kurven $|\sin z|^2 = c$ für $c = 0.25,\ 0.5,\ 1,\ 2$. Skizzieren Sie weiterhin das Höhenprofil von $|\tan z|^2$.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge der *analytischen* (!) Funktionen über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, den wir mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnen, einen Ring bilden.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(U)$ genau dann frei von Nullteilern ist, wenn U zusammenhängend ist.

   (c) Man gebe ein Beispiel einer nicht zusammenhängenden Menge und zweier Funktionen über dieser Menge an, für welches die Koinzidenzmenge der Funktionen zwar einen Häufungspunkt in U hat, die beiden Funktionen jedoch nicht übereinstimmen. Weiterhin gebe man ein Beispiel eines nicht konvexen Gebiets (genauer: nicht einfach zusammenhängend) und zweier Funktionen an, für das die Koinzidenzmenge einen Häufungspunkt auf dem Rand besitzt und die beiden Funktionen nicht übereinstimmen.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f'(z) = 1 + f(z)^2 \tag{1}$$

   mit der Anfangsbedingung $f(0) = a_0$. Bestimmen Sie eine Lösung dieses Anfangswertproblems in einer Kreisscheibe um 0 mit dem Potenzreihenansatz. Wie groß kann der Kreis gewählt werden? Hat f eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\,\mathbb{Z})$

4. (a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k} \tag{2}$$

   im Inneren ihres Konvergenzkreises. Berechnen Sie den Konvergenzradius und bestimmen Sie die maximale analytische Fortsetzung der durch die konvergente Potenzreihe gegebenen Funktion.

(b) Zeige analog: Die Reihe

$$a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \tag{3}$$

konvergiert im offenen Einheitskreis E und erfüllt $a(\tan z) = z$ für alle z, die $\tan z \in E$ genügen. (Hinweis: Analysis I. Daher nennen wir diese Funktion auch arc tan). Man diskutiere die Möglichkeit, a auf größere Gebiete als E analytisch fortzusetzen.

5. Man diskutiere ausführlich die Gültigkeit der Identität

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}\,. \tag{4}$$

Betrachten Sie zunächst E, dann auch größere, bzw. andere Gebiete (analytische Fortsetzung!). Für welchen (Zweig des) Logarithmus gilt die Identität?

6. Beweisen Sie folgende Aussagen ohne die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu benützen, nur mit Potenzreihen Methoden:

   (a) Falls eine Polynomfunktion nur reelle oder imaginäre Werte annimmt, muss diese konstant sein.

   (b) Falls der Realteil oder der Imaginärteil einer analytischen Funktion konstant ist, so ist die Funktion konstant.

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten vier Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte).
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 18. Mai 14:00h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe**.
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen**.