Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Übungsblatt 2

1. Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:
   (a) $\sum (2T)^{n!}$,
   (b) $\sum a_n T^n$, wobei $\left\{ \begin{array}{lcl} a_{2n} & = & c^n d^n \\ a_{2n+1} & = & 2c^n d^{n+1} \end{array} \right\}$ gilt für $0 < c < d$ und $c, d \in \mathbb{R}$,
   (c) $\sum \left(\frac{5+(-1)^n}{2} \right)^{-n} T^n$.

2. Für die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$ zeige man direkt:
   (a) Sie konvergiert in $\{\mathrm{Re}\ z > 0\}$ lokal gleichmäßig, aber nicht normal.
   (b) Sie konvergiert in $\{\mathrm{Re}\ z > 1\}$ normal.

3. Sei $r > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zeigen Sie:
   (a) $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \frac{1}{r}$. (b) $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1}{r}$.
   (c) Geben Sie eine Potenzreihe aus Aufgabe 1 an für die in diesen beiden Ungleichungen keine Gleichheit gilt und beweisen Sie das auch.

4. Gegeben sei folgender Ausdruck
$$f(z) = \int_1^{\infty} t^{-(z+1)} b(t)\, \mathrm{d}t,$$
   wobei $b(t)$ durch
$$b(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$$
   definiert wird. Hier bedeutet $[t]$ der ganzzahlige Anteil von t.

   Zeigen Sie, daß $f(z)$ eine analytische Funktion $f : \{\mathrm{Re}\ z > 0\} \to \mathbb{C}$ definiert.

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Ausdruck, der durch die Integration von 1 bis $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$ gegeben ist.

Bitte wenden!

5. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ der formalen Potenzreihen mit der Teilmenge $\mathbb{C}\langle \mathrm{T}\rangle$ der konvergenten Potenzreihen. Zeigen Sie ausführlich die zum Teil bereits in der Vorlesung festgestellten Aussagen:
   (a) Die Menge $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
   (b) Der Ring $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ ist ein Integritätsring (d.h. er ist nullteilerfrei).
   (c) $\mathbb{C}\langle \mathrm{T}\rangle$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$.
6. In dieser Aufgabe soll der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\langle \mathrm{T}\rangle$ ermittelt werden. Der Quotientenkörper Q eines Integritätsringes R ist der kleinste Körper der R enthält (Der Quotientenkörper ist bis auf Isomorphie eindeutig). Der Quotientenkörper Q kann folgendermaßen konstruiert werden: Erkläre auf $M := R \times (R\backslash\{0\})$ eine Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ad = cb$ und setze $Q := M/\sim$, die Menge der Äquivalenzklassen. Sie können diese Konstruktion als Definition verwenden.
   (a) Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ ist isomorph zum Körper der formalen Laurentreihen.
   (b) Der Quotientenkörper von $\mathbb{C}\langle \mathrm{T}\rangle$ ist isomorph zum Körper der konvergenten Laurentreihen.

   Teilaufgabe (b) soll dabei ohne Verwendung des Entwicklungssatzes gezeigt werden.

   Hinweise:
   Eine formale Laurentreihe $L(T)$ ist eine Reihe wie folgt:

$$L(T) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \mathrm{T}^n = P(T) + h(T^{-1})$$

   mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{Z}$, $P \in \mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ sowie $h \in \mathbb{C}[T^{-1}]$.
   Dies ist also eine formale Potenzreihe $P(T)$ zu der ein Polynom $h(T^{-1})$ addiert wurde.
   Eine konvergente Laurentreihe ist eine formale Laurentreihe mit konvergentem Potenzreihenanteil $P(T)$.

   Überlegen Sie sich für Teil (a) welche Elemente in $\mathbb{C}[\![\mathrm{T}]\!]$ invertiert werden können und definieren Sie das Inverse über das Cauchyprodukt.
   Für Teil (b) zeigen Sie zunächst, daß eine konvergente Potenzreihe P mit $P(0) \neq 0$ bereits in $\mathbb{C}\langle \mathrm{T}\rangle$ invertierbar ist. Dazu schätzen Sie die Koeffizienten b_n der inversen Potenzreihe $(P(T))^{-1}$ induktiv mit der Dreiecksungleichung ab. Es lohnt sich die ersten Folgenglieder b_n niederzuschreiben (siehe Cauchyprodukt).

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten vier Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte).
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 11. Mai 14:00h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe**.
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen**.