

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 13

1. Aufgabe: Die Parametrisierung der biholomorphen Abbildungen $\psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ (nach Satz aus der Vorlesung) liefert eine Bijektion $\varphi : \partial\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \text{Aut } \mathbb{E}$. Man beweise, dass diese Bijektion topologisch ist. Dabei ist auf $\text{Aut } \mathbb{E}$ die durch die kompakt-offene Topologie von $\mathcal{O}(\mathbb{E})$ induzierte Topologie gegeben und auf $\partial\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ die durch die Inklusion $\partial\mathbb{E} \times \mathbb{E} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ induzierte Topologie.

Man zeige ferner, dass die Komposition der Automorphismengruppe $\text{Aut } \mathbb{E}$ und die Inversenbildung über φ jeweils stetig differenzierbare Abbildungen induziert. ($\text{Aut } \mathbb{E}$ ist also eine Lie-Gruppe.) Im Falle der Inversenbildung gilt es zum Beispiel zu zeigen, dass

$$\lambda \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(\lambda)^{-1}), \lambda \in \partial\mathbb{E} \times \mathbb{E},$$

differenzierbar ist.

2. Aufgabe: Man folgere den Produktsatz von Weierstrass aus dem Satz von Mittag-Leffler, indem man zunächst zu einer vorgegebenen Verteilung von Nullstellen S mit den Nullstellenordnungen $k_p > 0$, $p \in S$ die Aufgabe, eine meromorphe Funktion mit den Hauptteilen

$$\frac{k_p}{z - p}, p \in S,$$

zu finden, löst, und dann den Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer holomorphen Funktion f und den Hauptteilen von

$$\frac{f'}{f}$$

benutzt.

3. Man bestimme die Nullstellen

(a) von $f(z) = z^5 + iz^3 - 4z + i$ in $A_{1,2}(0)$.

(b) von $g(z) = \lambda + z + e^{-z}$ in $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$.

4. Aufgabe: Man zeige für streng monoton fallende Nullfolgen $(c_n)_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine in $\mathbb{E}$ holomorphe Funktion definiert, die in $\mathbb{E}$ keine Nullstellen hat.

Bitte wenden!

5. Man beweise ausführlich, dass sternförmige Gebiete im $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend sind.
6. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften für ein Gebiet G in $\mathbb{C}$:

- (a) G ist einfach zusammenhängend.
- (b) G ist homöomorph zur Einheitskreisscheibe E (d.h. es gibt eine topologische Abbildung $G \rightarrow \mathbb{E}$).
- (c) Jede in G harmonische Funktion ist Realteil einer holomorphen Funktion.
- (d) Für jede Zerlegung $\mathbb{C} \setminus G = K \cup D$ mit K kompakt und D abgeschlossen (sowie $K \cap D = \emptyset$) gilt schon $K = \emptyset$. (Diese Eigenschaft kann man so verstehen, dass das Komplement von G in der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zusammenhängend ist.

- Dieses Übungsblatt ist das letzte in der Reihe der Aufgabenblätter. Es ist nicht obligatorisch. Es soll Anregungen geben für die Ferienzeit.
- Zugleich bieten wir die Möglichkeit, dass Teilnehmerinnen und Teilnehmer an dem Übungsbetrieb, die bisher noch nicht genügend Punkte haben, durch das Lösen dieser Aufgaben noch einige Punkte zur Ergänzung erzielen können.
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte). Ausnahmesweise dürfen alle 6 Aufgaben bearbeitet werden.
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Dienstag, den 28. Juli 10:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**