

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 12

1. Bestimmen Sie die Ordnung aller Punkte und klassifizieren Sie alle Polstellen folgender Funktionen:

(a)

$$f(z) := z \frac{(z-1)^2(z+3)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}$$

(b)

$$g(z) := \frac{\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)(1-z)}{\cos(2\pi z)}$$

2. Es sei f holomorph auf einem Gebiet U und es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Weiterhin sei g auf $f(U)$ meromorph. Man drücke $\text{res}_z g \circ f$ durch $\text{res}_{f(z)} g$ aus. Ist das Residuum einer Funktion demnach invariant unter biholomorphen Abbildungen?
3. Es sei G ein zusammenhängendes Gebiet, sodass jede in G verlaufende Kurve nullhomolog ist, $D \subset G$ eine diskrete Teilmenge und f holomorph auf $G \setminus D$. Man zeige: Genau dann hat f eine Stammfunktion auf $G \setminus D$, wenn alle Residuen von f verschwinden.
4. Zeigen Sie unter Verwendung des Residuensatzes folgendes Theorem:
Sei $f \in \mathcal{M}(D) \setminus \{f(z) \equiv a\}$ für ein Gebiet D und ein $a \in \mathbb{C}$, und γ eine in D nullhomologe geschlossene Kurve mit $\gamma^* \cap (P(f) \cup f^{-1}(a)) = \{c\}$, und $F \in \mathcal{O}(D)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} F(\xi) \frac{f'(\xi)}{f(\xi) - a} d\xi = 2\pi i \sum_{c \in P(f) \cup f^{-1}(a)} W(\gamma, c) \text{ord}_c(f - a) F(c)$$

5. Sei G ein Gebiet. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und habe in z_0 eine isolierte Singularität. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen
- (a) Für jede Umgebung $U \subset G$ von z_0 ist $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in \mathbb{C}
- (b) Es gibt eine Folge $z_n \rightarrow z_0$ in G , für die $f(z_n)$ beschränkt ist, aber nicht konvergiert.
6. Sei f analytisch in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, welches die Null enthält. Ferner sei $|f(z)| < C \forall z \in D$ mit $0 < C < \inf_{z \in \partial D} |z|$. Man zeige: Es existiert eine abgeschlossene Kreisscheibe in D , sodass f im Inneren dieser Kreisscheibe genau einen Fixpunkt hat (Hinweis: Sie benötigen ein Ergebnis aus der Vorlesung vom Donnerstag).

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten 4 Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte)
- Lösungen zu diesen Aufgaben können bis **Montag den 20. Juli 14:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe**
- **Bitte beachten Sie: Lösungsblätter mit mehr als einem Namen werden nicht mehr bewertet.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**