Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Übungsblatt 11

1. Bestimmen Sie die Laurententwicklung von $f(z) = (z-1)^{-1}(z-2)^{-2}$ in den folgenden Ringgebieten:
   (a) $A_{0,1}(0)$
   (b) $A_{1,2}(0)$
   (c) $A_{2,3}(0)$
   (d) $A_{0,1}(1)$
   (e) $A_{1,2}(1)$

2. Zeigen Sie die folgenden Identitäten mit Hilfe des Residuensatzes (bzw. Methoden der Vorlesung):
   (a)
   $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(3t)}{5-3\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 0$$
   (b)
   $$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

3. Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ die offene und $\overline{\mathbb{E}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Nach der Vorlesung wissen Sie, daß sich die Automorphismen ϕ von $\mathbb{E}$ stetig zu Abbildungen $\tilde{\phi}$ von $\overline{\mathbb{E}}$ nach $\overline{\mathbb{E}}$ fortsetzen. Sei $z \in \partial\mathbb{E}$ mit $\mathrm{Im}\,(z) > 0$.

   Zeigen Sie: Es existiert genau ein Automorphismus ϕ, so daß $\tilde{\phi}(1) = 1$, $\tilde{\phi}(-1) = -1$ und $\tilde{\phi}(\mathrm{i}) = z$ gilt.

   Hinweis: Beschreiben Sie die Menge der Automorphismen, die 1 und -1 fixieren.

4. (a) Sei L eine Laurentreihe, die auf einer nichtleeren offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie: Es existieren $0 \leq r < R \leq \infty$ und $p \in \mathbb{C}$, so daß $A_{r,R}(p)$ das größte Ringgebiet ist, auf dem L konvergiert.
   (b) Geben Sie eine Laurentreihe an, die in genau einem Punkt der komplexen Ebene konvergiert.

5. Bestimmen Sie von nachfolgenden Laurentreihen das maximale Konvergenzgebiet:

   (a)
   $$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{T^n}{n^2+2}$$

   (b)
   $$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{T^n}{\exp(\alpha n) + \exp(-\alpha n)} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

6. Sei $a > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:
   $$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi e^{-a}$$

   Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete meromorphe Funktion entlang einer geschlossenen Kurve, von der ein Teilstück die Strecke $[-R, R]$ darstellt. Wählen Sie dabei die Kurve so, daß alle Pole mit positivem Imaginärteil von der Kurve eingeschlossen werden.

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben, so werden nur die ersten zwei Aufgaben korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte).
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 13. Juli 14:00h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe**.
- **Bitte beachten Sie: Lösungsblätter mit mehr als einem Namen werden nicht mehr bewertet.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen**.