Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie
Übungsblatt 10

1. Es seien $f, g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph, also in $Aut(\mathbb{E})$. Es gelte jeweils:
   (a)
   - $f(0) = g(0)$
   - $f'(0) = g'(0)$

   Zeige, dass dann schon $f = g$ gilt.

   (b)
   - $f(a) = g(a)$
   - $f(b) = g(b)$

   mit $a \neq b \in \mathbb{E}$. Zeige, dass dann schon $f = g$ gilt.

2. Sei $g\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $U \subset \mathbb{C}$ offen und
$$F = \{f \in \mathcal{O}(U) | |f(z)| \leq |g(z)| \ \forall z \in U\}$$
Zeige, dass F kompakt ist.

3. Es seien $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge und $f\colon K \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft:
$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ holomorph mit } \ \|g - f\|_K < \epsilon \qquad (*)$$
Beweise:

   (a) Notwendig für die Eigenschaft $(*)$ ist, dass f auf K stetig und auf der Menge der inneren Punkte von K holomorph ist.

   (b) dass die in der ersten Teilaufgabe genannten Bedingungen an f nicht hinreichend sind damit f die Eigenschaft $(*)$ erfüllt (Gegenbeispiel!).

4. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $F = \{f\colon G \to \mathbb{E} | f \text{ holomorph}\}$

   (a) Beweise oder widerlege:
$$\sup_{f \in F} |f'(a)| < \infty$$

   (b) Falls die Behauptung in der ersten Teilaufgabe zutrifft, existiert dann ein $g \in F$ mit
$$|g'(a)| = \sup_{f \in F} |f'(a)| \ ?$$

Bitte wenden!

(c) Falls ein solches g mit $|g'(a)| = \sup_{f \in F} |f'(a)|$ wie in der vorherigen Teilaufgabe existiert, kann es dann so gewählt werden, dass auch noch $g(a) = 0$ gilt?

5. Es sei $G \neq \emptyset$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet. Das soll heissen, dass

$$z \in G \to \bar{z} \in G$$

Weiter sei

$$G_+ = \{z \in G | Im(z) > 0\}\,;\ G_- = \{z \in G | Im(z) < 0\}\,;\ G_0 = G \cap \mathbb{R}$$

Es sei nun $f\colon G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass $f|_{G_+}$ holomorph ist und $f(G_0) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass die durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } \ z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für } \ z \in G_- \end{cases}$$

definierte Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

6. Es sei γ die Kontur $\gamma(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Betrachte den Ausdruck

$$\phi\colon (0, \infty) \to \mathbb{C};\ s \mapsto \int_\gamma \frac{sin^2(z-1)}{(z-s)(z-\frac{1}{s})} dz$$

Zeige, dass ϕ -nach einer geeigneten Fortsetzung des Integranden bei $s = 1$- stetig in s ist.

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben werden nur die ersten vier korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte)
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 6. Juli 14:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- **Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.**
- **Bitte heften Sie Ihre abgegebenen Blätter zusammen.**