Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. M. Schottenloher
C. Paleani
M. Schwingenheuer
A. Stadelmaier

SS 2009

Übungen zur Funktionentheorie

Übungsblatt 1

1. Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Mengen um Körper handelt die als Körper isomorph zu $\mathbb{C}$ sind (aufgefasst als Gaussche Zahlenebene mit Koordinaten $x + iy$):

   (a) Die Menge der Matrizen

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \mathcal{M}(2,2;\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \right\}$$

   mit der Matrizenmultiplikation.

   (b) Der Restklassenring

$$\mathbb{R}[T]/\left(T^2+1\right)$$

   wobei $\mathbb{R}[T]$ den Ring der Polynome in der Variablen T mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ bezeichne und $\left(T^2+1\right)$ das Ideal, das von T^2+1 erzeugt wird. Die Addition ist koeffizientenweise definiert und die Multiplikation durch "ausmultiplizieren" und sammeln der Potenzen. Allgemein sei R ein Ring und I ein Ideal (eine additive Untergruppe die abgeschlossen gegenüber der Multiplikation ist), dann ist der Restklassenring R/I definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $r + I$ die aus Elementen in R bestehen deren Differenz im Ideal I liegt. Also $r \approx r' \iff r - r' = t$ mit $t \in I$. In unserem Fall sind die Polynome p, p' äquivalent $\iff p(T) - p'(T) = h(T)(T^2+1)$ für ein $h \in \mathbb{R}[T]$.

2. Seien a, b zwei verschiedene komplexe Zahlen und c eine positive reelle Zahl. Beschreiben Sie (mit Beweis!) den geometrischen Ort aller komplexer Zahlen, die die folgende Gleichung erfüllen:

   (a)

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = c$$

   Achten Sie im besonderen auf den Fall $c = 1$

   (b)

$$arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = c$$

   wobei hier $c \in [0, \pi[$. Achten Sie im besonderen auf den Fall $c = 0$. *Erklärung*: In der Vorlesung hatten Sie gezeigt (Polarkoordinaten), dass zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ ein eindeutiger Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$ existiert so dass $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ gilt. Es bezeichne nun $arg(z)$ diesen eindeutig bestimmten Winkel zu z. Wer will kann auch noch die Konstruktion mit Zirkel und Lineal dieses geometrischen Ortes mit angeben.

Bitte wenden!

3. In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?
   (a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x + iy \mapsto x + y$
   (b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x + iy \mapsto x^2 + y^2$
   (c) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x + iy \mapsto x^3 + ix^2y$

4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sowie $l \in \mathbb{C}$. Beweise im **Detail** die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (a) f ist in a komplex differenzierbar und hat dort die Ableitung l.
   (b) Es gibt eine in a stetige Funktion $\phi\colon D \to \mathbb{C}$ mit
   $$f(z) = f(a) + \phi(z)(z - a)$$
   und $\phi(a) = l$
   (c) Es gibt eine in a stetige Funktion $\rho\colon D \to \mathbb{C}$ mit
   $$f(z) = f(a) + l(z - a) + \rho(z)(z - a)$$
   und $\rho(a) = 0$
   (d) Definiert man $r\colon D \to \mathbb{C}$ durch die Gleichung
   $$f(z) = f(a) + l(z - a) + r(z)$$
   so gilt
   $$\lim_{z \to a} \frac{r(z)}{z - a} = 0$$

5. Wenden Sie a.)-d.) in der vorherigen Aufgabe auf die Funktion $f(z) = z^2$ an (bitte im Detail!).

6. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig, U offen und $0 \notin U$, für alle $z \in U$ gelte $(f(z))^2 = z$ zeigen Sie, dass f holomorph in U ist.

Achtung!

- Bitte wählen Sie 4 der 6 Aufgaben aus (volle Punktzahl bekommen Sie für 4 vollständig gelöste Aufgaben). Falls Sie mehr abgeben werden nur die ersten vier korrigiert!
- Alle Aufgaben tragen das gleiche Gewicht (4 Punkte)
- Zusammenarbeit ist erwünscht, Abschreiben wird jedoch geahndet!
- Lösungen zu diesen Übungsaufgaben können bis **Montag den 4. Mai 14:00 h** in die Übungskästen der jeweiligen Gruppe vor der Bibliothek eingeworfen werden.
- Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen und dem Buchstaben Ihrer Übungsgruppe.