Mathematisches Institut
Universität München

SoSe 2009

Prof. Dr. M. Schottenloher – Ergänzungen zur Vorlesung *Funktionentheorie*

21.05.2009

Paragraph C: Kalkül der Diffentialformen im Falle der komplexen Ebene

Der Kalkül der Differentialformen (genauer: der 1-Formen und der 0-Formen) ist im Zusammenhang mit der Wegintegration bekannt aus den Grundvorlesungen zur Analysis. In § B wurde der Kalkül kurz wiederholt. In diesem Paragraphen soll seine Wirksamkeit für die Funktionentheorie gezeigt werden, und es soll insbesondere die unmittelbare Beziehung zwischen den Potentialen in der allgemeinen reellen Theorie und den Stammfunktionen im Komplexen hergestellt werden. Ganz analog soll auch die einfache Beziehung zwischen geschlossenen 1-Formen und der Holomorphie von Koeffizienten f einer 1-Form der Gestalt fdz erläutert werden.

Insgesamt ist das alles ziemlich evident, es geht hier nur darum, einen Brückenschlag zu den Grundvorlesungen in Analysis herzustellen.

Es handelt sich also in diesem ergänzenden Paragraphen C erst einmal darum, die (komplexen) 1-Formen auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{C}$ zu studieren und insbesondere darzulegen, unter welchen Bedingungen sie ein Potential besitzen, wann sie lokal wegunabhängig integrierbar oder wann sie geschlossen sind.

Im Folgenden sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

(C.1) Definition: Unter einer *1-Form* (*Differentialform vom Grad 1*) *auf* U (oder auch *in* U) wird ein Ausdruck der Gestalt

$$\omega = Pdx + Qdy$$

mit Funktionen $P, Q : U \to \mathbb{C}$ verstanden. Dabei stehen x und y für die reellen Standardkoordinaten der komplexen Ebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Gegenüber dem aus der reellen Analysis bekannten Begriff einer 1-Form

$$\omega = G_1 dx^1 + \ldots + G_n dx^n$$

auf der offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit den Koordinatenfunktionen x^j, $j = 1, \ldots, n$, des $\mathbb{R}^n$ und mit den Funktionen $G_j : V \to \mathbb{R}$ sind jetzt auch komplexwertige *Koeffizientenfunktionen* G_j zugelassen. Das kann man sich auch so vorstellen, dass die reellen Vektorfelder $G = (G_1, \ldots, G_n) : V \to \mathbb{R}^n$ zu komplexen Vektorfeldern verallgemeinert werden: $G : V \to \mathbb{C}^n$.

(C.2) Definition: Das *totale Differential* einer reell differenzierbaren Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ ist die 1-Form

$$dF := F_x dx + F_y dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy\,.$$

dF ist die 1-Form, die dem *Gradienten*

$$\nabla F = (F_x, F_y)$$

zugeordnet ist. dF heißt auch die *äußere Ableitung* von F.

(C.3) Beispiele:

1° $dz = dx + idy\,.$

2° $d\overline{z} = dx - idy\,.$

3° $d(z^2) = 2zdx + i2zdy = 2zdz\,.$

4° $d(z\overline{z}) = 2xdx + 2ydy = \overline{z}dz + zd\overline{z}\,.$

(C.4) Lemma:

1° *Für* $\omega = Pdx + Qdy$ *gilt*

$$\omega = \frac{1}{2}(P - iQ)dz + \frac{1}{2}(P + iQ)d\overline{z}\,.$$

2° *Für reell differenzierbare* $F : U \to \mathbb{C}$ *ist daher*

$$dF = \partial F dz + \overline{\partial} F d\overline{z}\,.$$

3° *Für holomorphe* $F : U \to \mathbb{C}$ *gilt*

$$dF = F' dz\,.$$

Beweis. Die erste Identität folgt aus $(P - iQ)(dx + idy) = Pdx + Qdy + i(Pdy - Qdx)$ und $(P + iQ)(dx - idy) = Pdx + Qdy - i(Pdy - Qdx)$. Die zweite ergibt sich daraus direkt durch Einsetzen von $F_x = P$, $F_y = Q$. Und die dritte Identität folgt aus 2° wegen $\overline{\partial} F = 0$ und $\partial F = F'$ für holomorphe Funktionen F.

(C.5) Definition: Sei $\omega = Pdx + Qdy$ eine 1-Form auf U.

1° ω ist *exakt*, wenn es eine reell differenzierbare komplexe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $dF = \omega$ gilt. F heißt dann ein *Potential* von ω .

2° ω ist *geschlossen*, wenn P und Q partiell differenzierbare Funktionen sind und wenn $P_y = Q_x$, das heißt die *Integrabilitätsbedingung*, gilt.

(C.6) Lemma (Vergleich mit den Begriffen der Funktionentheorie): *Es sei* $f : U \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und* ω *die spezielle 1-Form* $\omega = fdz$.

1° *ω ist genau dann exakt, wenn f eine Stammfunktion hat. Und es gilt: Jedes Potential F zu $\omega = fdz$ ist eine Stammfunktion von f. Ebenso ist eine Stammfunktion F von f stets ein Potential zu $\omega = fdz$.*

2° *Wenn f reell differenzierbar ist, so gilt: ω ist genau dann geschlossen, wenn f holomorph ist.*

Beweis. 1°: $dF = \omega$ heißt $\partial F dz + \overline{\partial} F d\overline{z} = fdz$ nach C.4.2° und das bedeutet $\overline{\partial} F = 0$ und $\partial F = f$. Also ist F holomorph und es folgt , also $F' = \partial F = f$.
2°: $\omega = fdx + ifdy$ ist geschlossen, wenn $f_y = if_x$ und das ist genau das System der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Wir benötigen jetzt die Wegintegration. Im Falle von stetigen P, Q ist das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ für einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma = \alpha + i\beta$ mit reellen Wegen $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ bekanntlich

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b P(\gamma(t))\dot{\alpha}(t)dt + \int_a^b Q(\gamma(t))\dot{\beta}(t)dt\,.$$

(C.7) Satz: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für eine 1-Form $\omega = Pdx + Qdy$ mit stetigen P, Q auf einem Gebiet U:*

1° *ω ist exakt.*

2° *ω ist* wegunabhängig integrierbar, *das heißt, für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege α, β mit gleichem Anfangs- und Endpunkten gilt $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$.*

3° *Für alle geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Wege γ gilt*

$$\int_\gamma \omega = 0\,.$$

Beweis. 1° $\Longrightarrow$ 2°: Sei $dF = \omega$. Es sei $p = \alpha(a) = \beta(a) \in U$ der Anfangspunkt der beiden Wege und $q = \alpha(b) = \beta(b) \in U$ der Endpunkt. Dann gilt

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\alpha(t))dt = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)) = F(q) - F(p)$$

nach dem Hauptsatz und daher $\int_\alpha \omega = F(q) - F(p) = \int_\beta \omega$.
2° $\Longrightarrow$ 3°: Vergleiche γ mit dem konstanten Weg $\alpha(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ und wende 1° an.
3° $\Longrightarrow$ 1°: Wähle ein $p \in U$ und setze $F(z) := \int_\gamma \omega$ für irgendeinen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in U von p nach z. Dann ist $F(z)$ wohldefiniert nach 3°. Sei γ' ein stückweise stetig differenzierbarer Weg von p nach $z + t$ für $t \in \mathbb{R}$ nahe bei 0. Dann gilt $F(z + t) - F(z) = \int_{[z,z+t]} \omega$ nach 3°. Wegen $\int_{[z,z+t]} \omega = \int_0^1 P(z + st)tds$ folgt

$$F_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F(z + t) - F(z)) = \lim_{t\to 0} \int_0^1 P(z + ts)ds = P(z)\,,$$

und ebenso zeigt man $F_y = Q$. Also $dF = \omega$.

Genauso kann man aus den Analysisvorlesungen den Beweis des folgenden Resultats übernehmen:

(C.8) Lemma von Poincaré: *Sei $\omega = Pdx + Qdy$ eine geschlossene 1-Form auf einem konvexen Gebiet U mit stetig differenzierbaren P, Q. Dann ist ω exakt.*

(C.9) Folgerung: *Für eine 1-Form $\omega = Pdx + Qdy$ auf einem konvexen Gebiet mit stetig differenzierberen P, Q sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *ω ist exakt.*

2° *ω ist geschlossen*

3° *$\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Wege γ in U.*

4° *$\int_{\partial\triangle} \omega = 0$ für alle Dreiecke $\triangle$ in U.*

Beweis. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ folgt unmittelbar aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschung der Differentiationsreihenfolge bei 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen: $F_x = P$ und $F_y = Q$ bedeutet $P_y = F_{xy} = F_{yx} = Q_x$.
$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ ist das Lemma von Poincaré (C.8), $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ gilt nach C.7.3° und $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ ist trivial.
$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ wird genau wie in C.7, $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$, bewiesen, man benötigt in einem konvexen Gebiet die Bedingung $\int_\gamma \omega = 0$ nur für Dreieckswege.

Unter Verwendung von C.6 folgt aus C.9 unmittelbar die folgende Version des **lokalen Cauchyschen Integralsatzes**:

(C.10) Folgerung: *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen auf einem konvexen Gebiet U, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *f hat eine Stammfunktion.*

2° *f ist holomorph*

3° *$\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Wege γ in U.*

4° *$\int_{\partial\triangle} \omega = 0$ für alle Dreiecke $\triangle$ in U.*

Bemerkung: Nach dem Lemma von Goursat kann auf die Bedingung der Stetigkeit der Ableitungen von f in C.10 verzichtet werden. Hier sollte aber dargestellt werden, dass für stetig reell differenzierbare f die Äquivalenzen C.10 direkt aus den bekannten Resultaten der reellen Analysis folgen (in Verbindung mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen).

Das Lemma von Poincaré und daher auch die Folgerungen gelten im übrigen auch für sternförmige Gebiete und weiterhin für einfach zusammenhängende Gebiete.