Martin Schottenloher 3.9.1997

Programm

des Seminars 1997/98

Morse–Theorie

Vorbemerkungen:

Das Seminar orientiert sich in erster Linie an [Mi1]; Seitenangaben und sonstige Hinweise ohne spezielle Zitate beziehen sich immer auf diese Vorlesungsausarbeitung.

Jeder Seminarteilnehmer sollte vorab die drei Seiten der *Introduction* gründlich studiert und verstanden haben. Darüberhinaus ist grundsätzlich ein rudimentäres Wissen über differenzierbare Mannigfaltigkeiten nötig. Für fast alle Vorträge wird außerdem der Begriff des CW-Komplexes vorausgesetzt: Die Begriffe *CW-Komplex* und *simplizialer Komplex* sollten daher ebenfalls bekannt sein. Informationen über die Homologiegruppen $H_k(M, R)$ werden in der Vorlesung *Algebraische Topologie* bereitgestellt.

Die Vorträge sollen frei gehalten werden. Der Wert instruktiver Beispiele kann nicht überschätzt werden.

Zeit und Ort: Mo 14-16, E6

Erster Vortrag: 17. November 1997

Achtung! Terminänderung:

Nov./Dez.: Mi 18-20
Jan./Febr.: Mo 18-20

jeweils im Hörsaal E6.

Die Vorträge im einzelnen:

Die grundlegenden Vorträge:

1 Morse–Funktionen und Morse–Lemma

(Sebastian Petersen)

Dieser einführende und fundamentale Vortrag orientiert sich an den zweiten Paragraphen (S. 4–9). Dabei soll vorweg ausführlich auf die Schreibweise von Tangentialvektoren in Mannigfaltigkeiten eingegangen werden (siehe auch [BJ, La, Na]). Zum Einüben bzw. Wiederholen wird der Begriff einer Riemannschen Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit dargestellt unter Einschluß der Beschreibung in lokalen Koordinaten, des Begriffs des Gradienten (vgl. S. 12) und der Frage nach der Existenz von Riemannschen Metriken. Ein genereller Vergleich des eigentlichen Themas des Paragraphen mit [MC] ist wünschenswert. (Man beachte: *Morse-Funktion = Non–Degenerate Function*) Viele anschauliche Beispiele (mit instruktiven Bildern etwa wie S. 8/9, aber auch zu Metriken) sollen den Vortrag abrunden. Insbesondere wird die auf dem n-dimensionalen komplex–projektiven Raum gegebene Funktion

$$f(z_0 : z_1 : z_2 : ... : z_n) := \sum c_j |z_j|$$

auf kritische Punkte und Index untersucht (S. 27). Die dort angesprochenen Folgerungen für den projektiven Raum können bereits angesprochen werden.

2 Morse–Funktionen und der Homotopie–Typ von Mannigfaltigkeiten I

(Tamara Höcherl)

Bereits in diesem Vortrag kommen wir zur Hauptsache! Diese versteckt sich zunächst in den technischen Satz 3.1. Beispiele dazu! Der Beweis des Satzes soll ausführlich dargestellt werden — unter vorangehender Diskussion von Einparametergruppen (S.10/11). Als Anwendung: Satz von Reeb (4.1). (Es kann evtl. auch auf die Bemerkungen auf Seite 24 eingegangen werden.) Im Anschluß daran soll die Prozedur des *Anfügens von k-Zellen* gründlich dargestellt werden; mit elementaren und anschaulichen Beispielen, insbesondere unter Einschluß der inhaltlichen Vorstellung, wie der komplex-projektive n-dimensionale Raum durch sukzessives Anfügen von 2k-Zellen an einen Punkt entsteht ($1 \leq k \leq n$). Dazu 3.6 und 3.7. Ohne Beweis wird dann der Hauptsatz 3.5 vorgestellt und an Beispielen illustriert, u.a. durch die Homotopie–Aussage S. 27.

3 Morse–Funktionen und der Homotopie–Typ von Mannigfaltigkeiten II

(Peter Schachner)

Jetzt wird der Hauptsatz 3.5 bewiesen: Mittels der Lemmata 3.6 und 3.7 zunächst durch Rückführung auf den Satz 3.2. Dieser Satz 3.2 wird dann im wesentlichen durch eine Anwendung des bereits bewiesenen Satzes 3.1 gezeigt. Auf die in Paragraph 3 verstreuten Bemerkungen mit Literaturhinweisen soll nach Möglichkeit eingegangen werden. Wie und wo findet man die Resultate in [MC]?

4 Die Existenz von Morse–Funktionen

(Niko Naumann)

Beweis der Existenz einer Morse–Funktion auf einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit des n-dimensionalen Zahlenraumes (S. 32–38, siehe auch [MC]). Dazu muß der Satz von Sard gründlich vorgestellt und diskutiert werden (etwa nach [BJ] oder [Na])*. Weiterhin soll der Einbettungssatz von Whitney vorgestellt werden (ohne Beweis, vgl. Vortrag 5). Anwendungen: Jede parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit (des n-dimensionalen Zahlenraumes) hat den Homotopie-Typ eines CW-Komplexes; Eulercharakteristik und Vektorbündel. Abschließend: Index-Satz für L_p, auch als Vorbereitung von Vortrag 7 und gegebenenfalls Vortrag 8.

5 Die Sätze von Sard und Whitney

(N.N.)

Beginn: Satz über implizite Abbildungen, Umkehrsatz, Satz vom Rang im Kontext von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (siehe z.B. [BJ, La, Na]). Beweis des Satzes vom Rang, des Satzes von Sard (siehe auch [Mi2]) und des Einbettungssatzes von Whitney (nicht nur in [BJ]). Folgerung für die Existenz von Morse–Funktionen auf einer allgemeinen differenzierbaren parakompakten Mannigfaltigkeit.

Weiterführende Vorträge:

6 Die Morse–Ungleichungen

(Christian Voigt)

Die Morse–Ungleichungen in der ursprünglichen Fassung liefern zunächst weniger als der Hauptsatz aus Vortrag 2/3. Der Vortrag beginnt mit einer Wiederholung

*Ein Beweis des Satzes von Sard sollte erwogen werden, wenn der Vortrag 5 nicht zustande kommt.

zur Homologie, insbesondere mit einer kurzen Darstellung der exakten Homologiesequenz für die Homologiegruppen $H_k(X;R)$ und $H_k(X,Y;R)$ für $Y \in X$. Dann: Morse–Ungleichungen in schwacher und starker Form (Paragraph 5), Anwendungen auf Betti–Zahlen und noch einmal ein Blick auf den komplex-projektiven Raum. Nach diesen Grundlagen: Neuer Beweis mit Hilfe der Supersymmetrie nach Witten [Wi]. Ausblick; Physik in der *reinen* Mathematik?

7 Theorem von Lefschetz

(Robert Fischer)

Zu Beginn des Vortrags muß auf den Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit eingegangen werden (siehe z.B. [GH, La, Na]) unter Einbeziehung einiger relevanter Beispiele, insbesondere einmal mehr das Beispiel des komplex-projektiven Raumes. Danach läßt sich Satz 7.2 beweisen als eine Vorbereitung für den Beweis des Hyperebenentheorems von Lefschetz (7.3). Im Beweis zu 7.3 wird einiges an Homologie–Theorie benötigt, vor allem der Dualitätssatz von Lefschetz (siehe z.B. [Sp]). Im Vortrag kann auf die deRham–Inkarnation der Kohomologie — und damit der Homologie mit den reellen oder komplexen Zahlen als Koeffizenten — eingegangen werden (vgl. [BT]). Damit läßt sich die Poincaré-Dualität als Spezialfall der Lefschetz-Dualität erklären und schließlich die Lefschetz-Dualität selber. Zur Formulierung bzw. Beweis von 7.3 vergleiche man auch mit S. 156 bzw. S. 158ff. in [GH]. Insgesamt kann man aber mit dem Satz 7.2 als Anwendung der Morse–Theorie voll zufrieden sein.

8 Variationsrechnung und Morse–Index

(Marc Dissel)

Unter der Annahme, daß die Theorie der Geodäten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M bekannt sei, soll dieser Vortrag direkt in die Beschreibung des Raumes der stückweise stetig differenzierbaren Kurven auf M als unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit (siehe [La]) einsteigen und die Variationsrechnung (der Paragraphen 11–13) erläutern. Der Satz 15.1 zum Morse–Index ist eine weitgehende Verallgemeinerung eines Indexsatzes in Vortrag 4.

9 h-Kobordismus–Theorem

(N.N.)

Auszug aus [Mi3].

Literatur:

BJ BRÖCKER, T. / JÄNICH, K.: *Einführung in die Differentialtopologie.* Springer–Verlag, 1973.

BT BOTT, R. / TU, S.:*Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer–Verlag, 1981.

GH GRIFFITHS, P. / HARRIS, J..:*Principles of Algebraic Geometry.* Wiley, 1978.

Hi HIRSCH: *Differential Topology.* Springer-Verlag.

La LANG, S.: *Differentiable Manifolds.* Addison–Wesley, 1972. Neuauflage bei Springer.

Mi1 MILNOR, J.: *Morse Theory.* Annals of Maths. Series, Princeton Univ. Press, 1963.

Mi2 MILNOR, J.: *Lectures on the h-Cobordism Theorem.* Princeton Univ. Press, 1965.

Mi3 MILNOR, J.: *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Univ. Press of Virginia, 1965.

MC MORSE, M. / CAIRNS, S.: it Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology. Academic Press, 1969.

Na NARASIMHAN, R.: *Analysis on Real and Complex Manifolds.* North-Holland, 1968.

Sp SPANIER, E.:*Algebraic Topology.* McGraw–Hill, 1966.

Wi WITTEN, E.: Supersymmetry and Morse Theory *J. Diff. Geometry* **17** (1982), 621–692.