

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

53. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x + 1.$$

- a) Man begründe, daß f zweimal stetig partiell differenzierbar ist, und bestimme $\text{grad } f(x, y)$ und $\text{Hess } f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- b) Man zeige, daß f genau vier kritische Punkte besitzt.
- c) Man untersuche f auf lokale Extremstellen und Sattelpunkte.

54. a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-3x}.$$

- b) Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y}{2 \ln y} \quad \text{für } 0 < y < 1 \quad \text{mit } y(0) = e^{-1}$$

unter Angabe ihres Definitionsintervalls.

55. In der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 ist die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 26x + 22y + 21 = 0 \right\}$$

gegeben. Man zeige, daß Q eine Ellipse mit der metrischen Normalform

$$\frac{w^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

ist, und skizziere Q im x - y -Koordinatensystem.

56. a) Man untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

an der Stelle $(0, 0)$ auf Stetigkeit sowie auf partielle Differenzierbarkeit in x -Richtung und in y -Richtung.

- b) Man zeige, daß die beiden Quadriken

$$Q_1 : x^2 + 4xy - 5y^2 = 1 \quad \text{und} \quad Q_2 : x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$$

affin äquivalent sind, und gebe eine Affinität $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(Q_1) = Q_2$ an.