MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 13
31.01.2017

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

49. Die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_1 - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\,\lambda + 2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A_1 die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_1 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_1^\top A_1 P_1 = D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_1 normierte Eigenvektoren der Matrix A_1 zu den beiden Eigenwerten λ_1 und λ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\lambda_1\, w^2 + \lambda_2\, z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_1 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,x\,y + 6\,y^2 = 1 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A_2 - \mu\, E_2) = \begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ 2 & 6-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)(6-\mu) - 4 = \mu^2 - 7\,\mu + 2$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt A_2 die beiden Eigenwerte

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2} > 0;$$

damit gibt es eine orthogonale Matrix $P_2 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$P_2^\top A_2 P_2 = D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

wobei in den Spalten von P_2 normierte Eigenvektoren der Matrix A_2 zu den beiden Eigenwerten μ_1 und μ_2 stehen. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

also

$$\mu_1\, w^2 + \mu_2\, z^2 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2} = 1$$

über; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Damit ist Q_2 eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-\sqrt{41}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7+\sqrt{41}}}.$$

Insgesamt erhält man also das folgende Ergebnis:

- Die ebenen Quadriken Q_1 und Q_2 sind zwei Ellipsen und damit jeweils zum Einheitskreis und folglich auch zueinander affin äquivalent.
- Die beiden Ellipsen Q_1 und Q_2 sind aber nur dann auch euklidisch (metrisch) äquivalent, wenn sie dieselben Hauptachsenlängen besitzen; dies ist hier genau dann der Fall, wenn die beiden kleineren Eigenwerte λ_1 und μ_1 und die beiden größeren Eigenwerte λ_2 und μ_2 der beiden Matrizen A_1 und A_2 übereinstimmen. Wegen $\lambda_1 \neq \mu_1$ und $\lambda_2 \neq \mu_2$ sind nun Q_1 und Q_2 nicht metrisch äquivalent.

50. Der gegebene Kegelschnitt

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 + 6\,x_1 - 2\,x_2 + 1 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$2\, y_1^2 + 4\, y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\, y_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}\, y_2 + 1 = 0.$$

Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich

$$2\left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 4\left(y_2^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \\ = -1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

also

$$2\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ dann

$$2\, z_1^2 + 4\, z_2^2 = 2, \qquad \text{also} \qquad \frac{z_1^2}{1^2} + \frac{z_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt. Damit sind Q und der in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene Kegelschnitt

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \quad x_1^2 + t\, x_2^2 - 2\, t\, x_2 + t - 1 = 0 \right\}$$

genau dann kongruent, wenn auch Q_t eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist; wegen

$$(*) \iff x_1^2 + t\left(x_2^2 - 2\, x_2 + 1\right) = 1 \iff x_1^2 + t\,(x_2 - 1)^2 = 1,$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$ also

$$(*) \iff z_1^2 + t\, z_2^2 = 1,$$

ist dies genau für $t = 2$ der Fall.

51. a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5\,x^2 + 2\,x\,y + 5\,y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 14\sqrt{2}\,y + 10 = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 14\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 10 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda\,E_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1^2 = (4-\lambda)(6-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 6$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 14\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 10 = 0,$$

und damit

$$4\,u^2 + 6\,v^2 + 16\,u + 12\,v = -10$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$4\left(u^2 + 4\,u + 4\right) + 6\left(v^2 + 2\,v + 1\right) = -10 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1$$

und damit

$$4\,(u+2)^2 + 6\,(v+1)^2 = 12,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2 \\ v+1 \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\frac{w^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{3}^{\,2}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^{\,2}} = 1$$

ergibt; wir erhalten damit in

$$Q' = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid \frac{w^2}{\sqrt{3}^{\,2}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^{\,2}} = 1 \right\}$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse.

b) Gemäß a) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w-2 \\ z-1 \end{pmatrix} =$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

damit ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

mit

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine Bewegung, die die Ellipse Q' auf die Ellipse Q abbildet.

52. a) Wir untersuchen in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad x^2 - 2xy + (a+1)y^2 - 2ay + a - 1 = 0$$

gegebenen Quadrik; dabei gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2\,x\,y + y^2 + a\,y^2 - 2\,a\,y + a - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-y)^2 + a\left(y^2 - 2y + 1\right) - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-y)^2 + a\,(y-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dies motiviert folgende Fallunterscheidung:

- Für $a = 0$ ergibt sich mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 = 1$ eines Parallelenpaars.
- Für $a < 0$ ergibt sich mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ \sqrt{-a}\,(y-1) \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 - z^2 = 1$ einer Hyperbel.
- Für $a > 0$ ergibt sich mit der Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ \sqrt{a}\,(y-1) \end{pmatrix}$$

die affine Normalform $w^2 + z^2 = 1$ einer Ellipse.

b) Die beiden Quadriken

$$Q_1 : x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y = 0 \quad \text{und} \quad Q_2 : x^2 - 2xy + 3y^2 - 4y + 1 = 0$$

sind gemäß a) wegen $a_1 = 1 > 0$ und $a_2 = 2 > 0$ Ellipsen, mithin zum Einheitskreis und damit auch zueinander affin äquivalent. Gemäß den in a) ermittelten Variablentransformationen ergeben sich die beiden Affinitäten

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{a=1}{=} \begin{pmatrix} x - y \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{a=2}{=} \begin{pmatrix} x - y \\ \sqrt{2}y - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

welche die Quadriken Q_1 und Q_2 jeweils auf ihre affine Normalform abbilden. Insgesamt ist damit aber $f = f_2^{-1} \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left(f_2^{-1} \circ f_1\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eine Affinität, die die Ellipse Q_1 (über den Einheitskreis) auf die Ellipse Q_2 abbildet.