Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

45. Wir bestimmen die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad 2\,x^2 + x\,y - 6\,y^2 + 4\,x + y + 2 = 0$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Wegen

$$\begin{aligned}
(*) \quad \Longleftrightarrow \quad & 2\left(x^2 + \tfrac{1}{2}\,x\,y + 2\,x\right) - 6\,y^2 + y + 2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2\left(x^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y}{4} + 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot \frac{y}{4} \cdot 1\right) - \\
& \quad -2\left(\left(\frac{y}{4}\right)^2 + 1^2 + 2 \cdot \frac{y}{4} \cdot 1\right) - 6\,y^2 + y + 2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2 \cdot \left(x + \frac{y}{4} + 1\right)^2 - \frac{y^2}{8} - 2 - y - 6\,y^2 + y + 2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(x + \frac{y}{4} + 1\right)^2 - \frac{49}{16} y^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(x + \frac{y}{4} + 1\right)^2 - \left(\frac{7\,y}{4}\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

erhält man mit der affinen Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{4}\,y + 1 \\ \frac{7}{4}\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die affine Normalform

$$w^2 - z^2 = 0;$$

damit ist Q ein sich im Punkt $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidendes Geradenpaar. Für den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Quadrik Q ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x + \frac{1}{4}\,y + 1 \\ \frac{7}{4}\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $x + \frac{1}{4}\,y + 1 = 0$ und $\frac{7}{4}\,y = 0$, woraus zunächst $y = 0$ und dann $x = -1$ folgt.

46. Wir untersuchen in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ die affine Normalform der durch die Gleichung

$$(*) \qquad \lambda\, x^2 + 2\, x\, y + 2\, y^2 + \lambda^2 - 4 = 0$$

gegebenen Quadrik; dabei sind die Glieder in y parameterfrei. Wegen

$$\begin{aligned} (*) \quad &\iff \quad 2\, y^2 + 2\, x\, y + \lambda\, x^2 = 4 - \lambda^2 \\ &\iff \quad \big(4\, y^2 + 4\, x\, y\big) + 2\, \lambda\, x^2 = 2\, \big(4 - \lambda^2\big) \\ &\iff \quad \big(4\, y^2 + 4\, x\, y + x^2\big) - x^2 + 2\, \lambda\, x^2 = 2\, \big(4 - \lambda^2\big) \\ &\iff \quad (2\, y + x)^2 + (2\, \lambda - 1)\, x^2 = 2\, \big(4 - \lambda^2\big) \end{aligned}$$

erhält man mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, y + x \\ x \end{pmatrix}$ zunächst

$$u^2 + (2\, \lambda - 1)\, v^2 = 2\, \big(4 - \lambda^2\big)\,.$$

Da nun der Koeffizient 1 von u^2 positiv ist, stellt damit Q_λ genau dann eine Ellipse dar, wenn sowohl der Koeffizient $2\, \lambda - 1$ von v^2 als auch die rechte Seite $2\, (4 - \lambda^2)$ positiv ist; wegen

$$2\, \lambda - 1 > 0 \iff 2\, \lambda > 1 \iff \lambda > \tfrac{1}{2}$$

und

$$2\, \big(4 - \lambda^2\big) > 0 \iff 4 - \lambda^2 > 0 \iff \lambda^2 < 4 \iff -2 < \lambda < 2$$

ist dies genau für $\lambda \in \left]\tfrac{1}{2}, 2\right[$ der Fall.

47. Wir ermitteln für den in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ gegebenen Kegelschnitt

$$K_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \quad x^2 + 2\, s\, x\, y + s\, (s+1)\, y^2 + 2\, x = 0 \right\}$$

die affine Normalform und den affinen Typ über quadratischer Ergänzung; es ist

$$\begin{aligned} (*) \quad &\iff \quad \big(x^2 + 2\, s\, x\, y + 2\, x\big) + s\, (s+1)\, y^2 = 0 \\ &\iff \quad \big(x^2 + 2 \cdot x \cdot (s\, y) + 2 \cdot x \cdot 1 + (s\, y)^2 + 1^2 + 2 \cdot (s\, y) \cdot 1\big) + \\ &\qquad\qquad + s\, (s+1)\, y^2 - \big((s\, y)^2 + 1^2 + 2 \cdot (s\, y) \cdot 1\big) = 0 \\ &\iff \quad (x + s\, y + 1)^2 + \big(s\, y^2 - 2\, s\, y - 1\big) = 0 \\ &\iff \quad (x + s\, y + 1)^2 + s\, \big(y^2 - 2\, y\big) = 1 \\ &\iff \quad (x + s\, y + 1)^2 + s\, (y - 1)^2 = 1 + s, \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $0 < s$ ist

  $$(*) \iff \left(\frac{x + s\, y + 1}{\sqrt{1 + s}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{s}\, (y - 1)}{\sqrt{1 + s}} \right)^2 = 1;$$

  damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 + v^2 = 1$ einer Ellipse.

- Für $s = 0$ ist
$$(*) \iff (x+1)^2 = 1;$$
damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 = 1$ eines parallelen Geradenpaars.
- Für $-1 < s < 0$ ist
$$(*) \iff \left(\frac{x + s\,y + 1}{\sqrt{1+s}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-s}\,(y-1)}{\sqrt{1+s}}\right)^2 = 1;$$
damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 - v^2 = 1$ einer Hyperbel.
- Für $s = -1$ ist
$$(*) \iff (x - y + 1)^2 - (y-1)^2 = 0;$$
damit besitzt K_s die affine Normalform $u^2 - v^2 = 0$ eines sich schneidenden Geradenpaars.
- Für $s < -1$ ist
$$(*) \iff -\left(\frac{x + s\,y + 1}{\sqrt{-(1+s)}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-s}\,(y-1)}{\sqrt{-(1+s)}}\right)^2 = 1;$$
damit besitzt K_s die affine Normalform $-u^2 + v^2 = 1$ einer Hyperbel.

48. a) Die Verbindungsgerade L_t der Punkte $(1,0)$ und (t,t) besitzt den Trägerpunkt
$$t_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
sowie den Richtungsvektor
$$u_L = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$$
und damit die Parameterdarstellung
$$L_t = t_L + \mathbb{R} \cdot u_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix};$$
die Verbindungsgerade M_t der Punkte $(0,1)$ und $(-t,-t)$ besitzt den Trägerpunkt
$$t_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sowie den Richtungsvektor
$$u_M = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

und damit die Parameterdarstellung

$$M_t = t_M + \mathbb{R} \cdot u_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ -t-1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnittpunkt P_t der beiden Geraden L_t und M_t gibt es nun Parameter λ, $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}}_{P_t \in L_t} = P_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -t \\ -t-1 \end{pmatrix}}_{P_t \in M_t},$$

wodurch sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} t-1 & t \\ t & t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt; wegen

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} t-1 & t & -1 \\ t & t+1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{II}}{\leadsto} \\ &\leadsto \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ t & t+1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{II}+t\cdot\text{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1-2\,t \end{array}\right) \underset{\text{I}+\text{II}}{\leadsto} \\ &\leadsto \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1-2\,t \\ 0 & 1 & -2\,t+1 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\text{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\,t+1 \\ 0 & 1 & -2\,t+1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

ist $\lambda = 2\,t+1$ und $\mu = -2\,t+1$, wodurch man schließlich

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2\,t+1) \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,t^2 - t \\ 2\,t^2 + t \end{pmatrix}$$

erhält.

b) Gemäß a) besitzt der Schnittpunkt P_t die beiden Koordinaten

$$x_t = 2\,t^2 - t \qquad \text{und} \qquad y_t = 2\,t^2 + t;$$

wegen

$$(x_t - y_t)^2 = \left(\left(2\,t^2 - t\right) - \left(2\,t^2 + t\right)\right)^2 = (-2\,t)^2 = 4\,t^2$$

und

$$x_t + y_t = \left(2\,t^2 - t\right) + \left(2\,t^2 + t\right) = 4\,t^2$$

gilt also

$$(x_t - y_t)^2 = x_t + y_t,$$

weswegen P_t auf der ebenen Quadrik

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y)^2 = x + y\right\}$$

liegt. Mit der affinen Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ergibt sich hierfür die affine Normalform

$$u^2 = v \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 - v = 0$$

einer Parabel.