MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 11
17.01.2017

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

41. Es ist
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \right\}$$
mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $c = -4 \in \mathbb{R}$. Wegen
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 2) \cdot \lambda$$
für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$ mit den normierten Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit der orthogonalen Matrix $P = (v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt dann mit $P^\top A P = D$; mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung
$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$
also
$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 4 = 0,$$
und damit
$$2\,u^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\,u - \frac{2}{\sqrt{2}}\,v - 4 = 0.$$
Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich
$$2 \left(u^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) - \sqrt{2}\, v - 4 - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0,$$
also
$$2 \left(u - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \sqrt{2} \left(v + \frac{5}{\sqrt{2}} \right) = 0,$$

so daß sich mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v + \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ dann

$$2\,w^2 - \sqrt{2}z = 0, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{2}\,w^2 - z = 0,$$

die euklidische Normalform einer Parabel ergibt.

42. Der gegebene Kegelschnitt

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,s\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1 = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist der Kegelschnitt P genau dann eine Parabel, wenn er ohne Mittelpunkt ist, also das lineare Gleichungssystem $A \cdot m = -\frac{1}{2}\,b$ keine Lösung besitzt: wegen

$$\left(A \,|\, -\tfrac{1}{2}\,b\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & s & -1 \\ s & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-s\cdot\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & s & -1 \\ 0 & 1-s^2 & -1+s \end{array}\right)$$

ist dies genau für $1 - s^2 = 0$ und $-1 + s \neq 0$, also für $s = -1$ der Fall. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 2)\cdot\lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$T = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $T^\top A T = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} T^\top A T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\,v + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 2\,u^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \left(v + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0.$$

Mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ dann

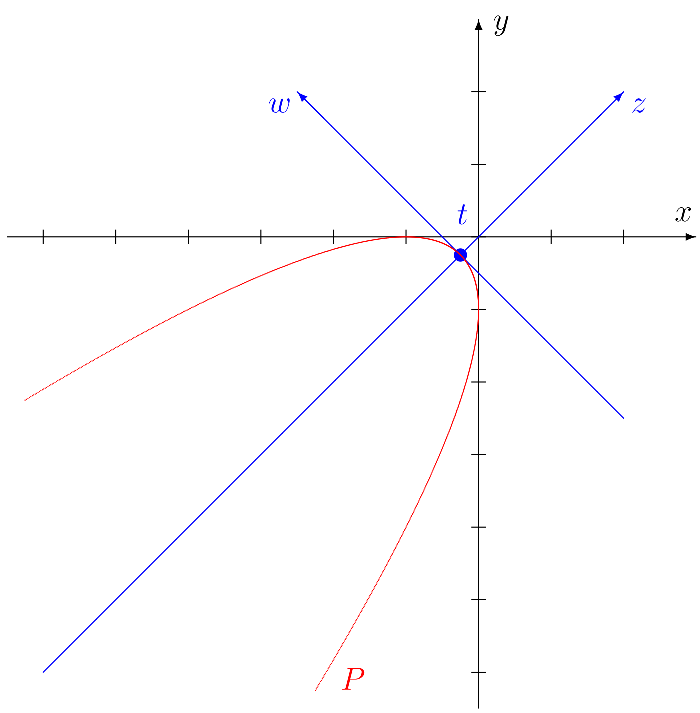
$$2\,w^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\,z = 0, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\,w^2 + z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel ergibt. Insgesamt ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=t};$$

es ist t der Scheitel und die z–Achse $t + \mathbb{R} \cdot v_2$ die Symmetrieachse von P.



43. Für den Abstand $d(X,P)$ des Punktes $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vom Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt

$$d(X,P) = \|X - P\| = \left\| \begin{pmatrix} p-3 \\ q-4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(p-3)^2 + (q-4)^2}.$$

Ferner besitzt die Gerade $L = \mathbb{R} \cdot u_L$ mit dem Richtungsvektor $u_L = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ den Normalenvektor

$$\widetilde{u}_L = u_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|\widetilde{u}_L\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und damit die Hessesche Normalform

$$L \quad : \quad \frac{3\,x + 4\,y}{5} = 0;$$

für den Abstand $d(X,L)$ des Punktes X von der Geraden L gilt demnach

$$d(X,L) = \left| \frac{3\,p + 4\,q}{5} \right|.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
d(X,P) = d(X,L) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(p-3)^2 + (q-4)^2} = \left| \frac{3\,p + 4\,q}{5} \right| \\
&\Longleftrightarrow \quad (p-3)^2 + (q-4)^2 = \left(\frac{3\,p + 4\,q}{5} \right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad p^2 - 6p + 9 + q^2 - 8q + 16 = \frac{9p^2 + 24pq + 16q^2}{25} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{16}{25}p^2 - \frac{24}{25}pq + \frac{9}{25}q^2 - 6p - 8q + 25 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 16p^2 - 24pq + 9q^2 - 150p - 200q + 625 = 0
\end{aligned}$$

Folglich ist die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte X, die vom Punkt P und der Geraden L denselben Abstand haben, die Quadrik

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 16p^2 - 24pq + 9q^2 - 150p - 200q + 625 = 0 \right\};$$

sie besitzt also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -150 \\ -200 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 625 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (16-\lambda)\cdot(9-\lambda) - (-12)^2 =$$
$$= \left(144 - 25\,\lambda + \lambda^2\right) - 144 = \lambda^2 - 25\,\lambda = (\lambda - 25)\cdot\lambda$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 0$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Mit der orthogonalen Matrix

$$S = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $S^\top A S = D$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} S^\top A S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -150 & -200 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 625 = 0,$$

und damit

$$25\,u^2 - 250\,v + 625 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 - 10\,v + 25 = 0.$$

Es ergibt sich damit

$$u^2 - 10\left(v - \frac{5}{2}\right) = 0,$$

mit der erneuten Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ also in

$$w^2 - 10\,z = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{10} - z = 0,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Parabel.

44. Der in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Kegelschnitt Q_a im $\mathbb{R}^2$ mit Variablen $x,\, y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$(a+1)x^2 + (a+1)y^2 + 2(a-1)xy + 2\sqrt{2}a\, x + 2\sqrt{2}a\, y + 2a - 2 = 0$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_a^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_a = 0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sowie

$$b_a = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}a \\ 2\sqrt{2}a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{und} \qquad c_a = 2a - 2 \in \mathbb{R}.$$

Für $a = 1$ ist A_a bereits eine Diagonalmatrix, und Q_a besitzt die Gleichung

$$2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + y^2 + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 0,$$

also

$$\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{2}\right) + \left(y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\,y + \frac{1}{2}\right) = 1$$

und damit

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1;$$

mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ergibt sich in

$$w^2 + z^2 = 1$$

die euklidische Normalform eines Kreises.

Für $a \neq 1$ besitzt nun die Matrix A_a wegen

$$\begin{aligned} \chi_{A_a}(\lambda) &= \det(A_a - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix} (a+1)-\lambda & a-1 \\ a-1 & (a+1)-\lambda \end{vmatrix} \\ &= ((a+1)-\lambda)^2 - (a-1)^2 = (2-\lambda)\,(2a-\lambda) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2a$; wegen

$$A_a - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} a-1 & a-1 \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{a-1}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{a-1}\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor von A_a zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A_a - \lambda_2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -a+1 & a-1 \\ a-1 & -a+1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{a-1}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{a-1}\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor von A_a zum Eigenwert $\lambda_2 = 2a$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_a = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A_a P = D_a$. Mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^\top A_a P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b_a^\top P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c_a = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\,a & 2\sqrt{2}\,a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2a - 2 = 0,$$

und damit

$$2\,u^2 + 2a\,v^2 + 4a\,v + 2a - 2 = 0,$$

also

$$2\,u^2 + 2a\left(v^2 + 2\,v + 1\right) = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad u^2 + a\,(v+1)^2 = 1;$$

mit der erneuten mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v+1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$w^2 + a\,z^2 = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- für $a > 0$ ergibt sich in
$$\frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2} = 1$$
die euklidische Normalform einer Ellipse,
- für $a = 0$ ergibt sich in
$$\frac{w^2}{1^2} = 1$$
die euklidische Normalform eines parallelen Geradenpaars,
- für $a < 0$ ergibt sich in
$$\frac{w^2}{1^2} - \frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{-a}})^2} = 1$$
die euklidische Normalform einer Hyperbel.