

**Übungen zur Vorlesung
„Mathematik im Querschnitt“
— Lösungsvorschlag —**

37. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 14x^2 - 4xy + 11y^2 - 28x + 4y + 13 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} -28 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 13 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_2) &= \begin{vmatrix} 14 - \lambda & -2 \\ -2 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (14 - \lambda)(11 - \lambda) - (-2)^2 = \\ &= 154 - 25\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 25\lambda + 150 = (\lambda - 10)(\lambda - 15) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = 15$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 10$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 15$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann $P^T A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^T A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (-28 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 13 = 0,$$

und damit

$$10u^2 + 15v^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}u + \frac{60}{\sqrt{5}}v + 13 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} 10 \left(u^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot u + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) + 15 \left(v^2 + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot v + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) &= \\ &= -13 + 10 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 15 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$10 \left(u - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 15 \left(v + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ v + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$10w^2 + 15z^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform dar. Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ z - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=t}; \end{aligned}$$

damit ist

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

eine Bewegung, die die Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = 1 \right\}$$

in euklidischer (metrischer) Normalform auf die gegebene Quadrik Q abbildet.

Folglich ist Q eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge $\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

38. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 7x^2 + 48xy - 7y^2 - 6x + 8y = 0 \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 0 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 24 \\ 24 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(-7 - \lambda) - 24^2 = (\lambda - 25)(\lambda + 25)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = -25$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 24 & -32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -25$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann $P^T A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^T A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

und damit

$$25 u^2 - 25 v^2 + 10 v = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$25 u^2 - 25 \left(v^2 - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot v + \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right) = -25 \left(\frac{1}{5} \right)^2$$

und damit

$$\left(v - \frac{1}{5} \right)^2 - u^2 = \left(\frac{1}{5} \right)^2$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$\frac{z^2}{\left(\frac{1}{5} \right)^2} - \frac{w^2}{\left(\frac{1}{5} \right)^2} = 1$$

ergibt; letztere stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Hyperbel dar.

39. a) Die gegebenen Geraden $g = t_g + \mathbb{R} \cdot u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R} \cdot u_h$ mit

$$t_g = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

besitzen die Normalenvektoren

$$\tilde{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \tilde{u}_h = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Gleichungen

$$g \quad : \quad \tilde{u}_g \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{u}_g \circ t_g, \quad \text{also} \quad x + 3 y = 24,$$

und

$$h \quad : \quad \tilde{u}_h \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{u}_h \circ t_h, \quad \text{also} \quad 3x + y = 8;$$

wegen $\|\tilde{u}_g\| = \sqrt{10}$ und $\|\tilde{u}_h\| = \sqrt{10}$ ist

$$\frac{x + 3y - 24}{\sqrt{10}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{3x + y - 8}{\sqrt{10}} = 0$$

die Hessesche Normalform von g bzw. h , und man erhält

$$d(P, g) = \left| \frac{x + 3y - 24}{\sqrt{10}} \right| \quad \text{und} \quad d(P, h) = \left| \frac{3x + y - 8}{\sqrt{10}} \right|.$$

- b) Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 mit der Eigenschaft

$$(*) \quad d(P, g)^2 + d(P, h)^2 = 40;$$

dabei gilt

$$\begin{aligned} (*) &\iff \left(\frac{x + 3y - 24}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left(\frac{3x + y - 8}{\sqrt{10}} \right)^2 = 40 \\ &\iff (x + 3y - 24)^2 + (3x + y - 8)^2 = 400 \\ &\iff (x^2 + 9y^2 + 576 + 6xy - 48x - 144y) + \\ &\quad + (9x^2 + y^2 + 64 + 6xy - 48x - 16y) = 400 \\ &\iff 10x^2 + 10y^2 + 640 + 12xy - 96x - 160y = 400 \\ &\iff 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 48x - 80y + 120 = 0. \end{aligned}$$

- c) Die in b) ermittelte Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 48x - 80y + 120 = 0 \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} -48 \\ -80 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = 120 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 3^2 = (2 - \lambda)(8 - \lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot P^\top A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^\top P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (-48 \quad -80) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 120 = 0,$$

und damit

$$2u^2 + 8v^2 + \frac{32}{\sqrt{2}}u - \frac{128}{\sqrt{2}}v + 120 = 0$$

über. Mit Hilfe quadratischer Ergänzung ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} 2 \left(u^2 + 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot u + \left(\frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) + 8 \left(v^2 - 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot v + \left(\frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) &= \\ &= -120 + 2 \left(\frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 + 8 \left(\frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$2 \left(u + \frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 + 8 \left(v - \frac{8}{\sqrt{2}} \right)^2 = 200,$$

so daß sich mit der Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{8}{\sqrt{2}} \\ v - \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$2w^2 + 8z^2 = 200 \quad \text{bzw.} \quad \frac{w^2}{10^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$$

ergibt; dabei ist insgesamt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w - \frac{8}{\sqrt{2}} \\ z + \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}}_{=t}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + t,$$

eine Bewegung, die die Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{10^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1 \right\}$$

in euklidischer (metrischer) Normalform auf die Quadrik Q abbildet; folglich ist Q eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $t = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, den Hauptachsen

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t + \mathbb{R} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den den Hauptachsenabschnitten der Länge 10 und 5.

40. a) Die Gerade b durch die Punkte $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ besitzt den Trägerpunkt A und den Richtungsvektor $u_b = C - A = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$, folglich den Normalenvektor $\tilde{u}_b = u_b^\perp = \begin{pmatrix} -t \\ t+1 \end{pmatrix}$, und damit die Gleichung

$$\tilde{u}_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{u}_b \circ A \quad \text{bzw.} \quad -tx + (t+1)y = t.$$

- b) Die Höhe h_B des Dreiecks ABC durch die Ecke $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht auf der Seite b durch die Ecken A und C senkrecht; folglich besitzt h_B den Trägerpunkt B und den Normalenvektor u_b und folglich die Gleichung

$$u_b \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u_b \circ B \quad \text{bzw.} \quad (t+1)x + ty = t+1.$$

- c) Die Seite durch die Ecken A und B stimmt mit der x -Achse überein; daher ist die Höhe h_C durch den Punkt C eine Parallele zur y -Achse und besitzt die Gleichung $x = t$. Die Koordinaten des Höhenschnittpunkts $H = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ des Dreiecks ABC müssen nun den Gleichungen der beiden Höhen h_B und h_C genügen; aus

$$(t+1)x_H + ty_H = t+1 \quad \text{und} \quad x_H = t$$

folgt zunächst $(t+1)t + ty_H = t+1$, also

$$ty_H = (t+1) - (t+1)t = (t+1)(1-t) = 1-t^2,$$

und wegen $t \neq 0$ ergibt sich

$$y_H = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

- d) Die Koordinaten $x_t = t$ und $y_t = \frac{1}{t} - t$ des Höhenschnittpunkts H genügen der Gleichung

$$y = \frac{1}{t} - t = \frac{1}{x} - x \quad \text{bzw.} \quad xy = 1 - x^2;$$

damit liegt H auf der Quadrik Q des \mathbb{R}^2 mit der Gleichung

$$x^2 + xy - 1 = 0;$$

Q besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad c = -1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > 0$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$; sind v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 , so ergibt sich mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right) \quad \text{die Beziehung} \quad P^\top A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ führt nun die gegebene Gleichung $(x \ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ in die Gleichung $(u \ v) \cdot P^T A P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$, also

$$\underbrace{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}_{>0} u^2 + \underbrace{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}}_{<0} v^2 = 1;$$

damit ist Q eine Hyperbel.