MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2016/17
Blatt 8
13.12.2016

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ — Lösungsvorschlag —

29. a) Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y''' - 3\,y'' + y' - 3\,y = 0$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^3 - 3\,\lambda^2 + \lambda - 3 = (\lambda-3)\cdot\lambda^2 + (\lambda - 3) \\ &= (\lambda-3)\left(\lambda^2+1\right) = (\lambda-3)(\lambda-i)(\lambda+i) \end{aligned}$$

mit der einfachen reellen Nullstelle $\lambda_1 = 3$ sowie den beiden einfachen konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{2,3} = \pm i$ mit dem Realteil $\varrho = 0$ und dem Imaginärteil $\pm\sigma$ mit $\sigma = 1$; damit bilden die drei Funktionen

$$\begin{aligned} &\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad &\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{3x}, \\ &\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad &\varphi_2(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x) = \cos x, \\ &\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad &\varphi_3(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x) = \sin x, \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0), und die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + c_3\,\varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{3x} + c_2\,\cos x + c_3\,\sin x,$$

mit c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D_0). Dabei sind beispielsweise φ_2 und φ_3 periodische Lösungen von (D_0), während etwa die Lösung φ_1 nicht periodisch ist.

b) Die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y''' - 3\,y'' + y' - 3\,y = 17\,e^{4x}$$

dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 17\,e^{4x},$$

von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der konstanten Funktion $p(x) = 17$ sowie $a = 4$. Da nun a keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{4x} = r\,e^{4x}$$

mit der ebenfalls konstanten Funktion $q(x) = r$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 4\,r\,e^{4x}, \qquad \varphi_p''(x) = 16\,r\,e^{4x} \quad \text{und} \quad \varphi_p'''(x) = 64\,r\,e^{4x}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$\left(64\,r\,e^{4x}\right) - 3\left(16\,r\,e^{4x}\right) + \left(4\,r\,e^{4x}\right) - 3\left(r\,e^{4x}\right) = 17\,e^{4x},$$

also

$$17\,r\,e^{4x} = 17\,e^{4x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $17\,r = 17$ und damit $r = 1$. Damit ist

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = e^{4x},$$

eine spezielle Lösung sowie die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + c_3\,\varphi_3 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(x) = c_1\,e^{3x} + c_2\,\cos x + c_3\,\sin x + e^{4x},$$

mit $c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D). Wegen

$$\varphi'(x) = 3\,c_1\,e^{3x} - c_2\,\sin x + c_3\,\cos x + 4\,e^{4x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\,e^0 + c_2\,\cos 0 + c_3\,\sin 0 + e^0 = 0 \iff$$
$$\iff c_1 + c_2 + 1 = 0 \iff c_2 = -(c_1 + 1)$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff 3\,c_1\,e^0 - c_2\,\sin 0 + c_3\,\cos 0 + 4\,e^0 = 0 \iff$$
$$\iff 3\,c_1 + c_3 + 4 = 0 \iff c_3 = -(3\,c_1 + 4)$$

stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{3x} - (c_1 + 1)\,\cos x - (3\,c_1 + 4)\,\sin x + e^{4x},$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des gestellten Anfangswertproblems dar.

30. Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y'' - 5\,y' + 6\,y = 12\,x^2 - 26\,x + 15$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; wir betrachten zudem die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$(\text{D}_0) \qquad y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Es besitzt (D_0) das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 3)$$

mit den beiden einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = 3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1,\, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0). Ferner besitzt (D) die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 12\,x^2 - 26\,x + 15,$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 12\,x^2 - 26\,x + 15$ vom Grade $m = 2$ und $a = 0$. Da a keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von (D) den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ vom Grade $m = 2$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2\,r\,x + s \qquad \text{und} \qquad \varphi_p''(x) = 2\,r$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$2\,r - 5\,(2\,r\,x + s) + 6\,\big(r\,x^2 + s\,x + t\big) = 12\,x^2 - 26\,x + 15,$$

also

$$6\,r\,x^2 + (-10\,r + 6\,s)\,x + (2\,r - 5\,s + 6\,t) = 12\,x^2 - 26\,x + 15,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$6\,r = 12, \quad -10\,r + 6\,s = -26 \quad \text{und} \quad 2\,r - 5\,s + 6\,t = 15,$$

also $r = 2$, $s = -1$ und $t = 1$, und folglich

$$\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(x) = 2\,x^2 - x + 1.$$

Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x} + 2\,x^2 - x + 1,$$

mit $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

b) Für die in a) ermittelte Lösungsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x} + 2\,x^2 - x + 1$$

gilt

$$\varphi'(x) = 2\,c_1\,e^{2x} + 3\,c_2\,e^{3x} + 4\,x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und wir bestimmen die noch freien Konstanten $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$, so daß φ die gestellten Anfangsbedingungen erfüllt. Wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1\, e^0 + c_2\, e^0 + 2 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 0 \iff c_1 + c_2 = -1$$

und

$$\varphi'(0) = 0 \iff 2\, c_1\, e^0 + 3\, c_2\, e^0 + 4 \cdot 0 - 1 = 0 \iff 2\, c_1 + 3\, c_2 = 1$$

ergibt sich $c_1 = -4$ und $c_2 = 3$, und wir erhalten die Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = -4\, e^{2x} + 3\, e^{3x} + 2\, x^2 - x + 1.$$

31. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' + y' - 6\, y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)\,(\lambda + 3)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = -3$; damit bilden die beiden Funktionen $\varphi_1,\, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}$$

ein Fundamentalsystem von (D_0). Die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \cos x,$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x}\, \cos(kx)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$ sowie $a = 0$ und $k = 1$. Da $a + ki = i$ keine Nullstelle von χ ist, wählen wir für die partikuläre Lösung φ_p von

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' + y' - 6\, y = \cos x$$

den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\, \cos x + q_2(x)\, \sin x$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r$ und $q_2(x) = s$ vom Grade $m = 0$. Wegen

$$\varphi_p'(x) = -r \sin x + s \cos x \quad \text{und} \quad \varphi_p''(x) = -r \cos x - s \sin x$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$(-r \cos x - s \sin x) + (-r \sin x + s \cos x) - 6\,(r \cos x + s \sin x) = \cos x,$$

also

$$(-7\, r + s) \cos x + (-r - 7\, s) \sin x = \cos x,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $-7\,r + s = 1$ und $-r - 7\,s = 0$, also $r = -\frac{7}{50}$ und $s = \frac{1}{50}$, und folglich $\varphi_p(x) = -\frac{7}{50}\cos x + \frac{1}{50}\sin x$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x} - \frac{7}{50}\cos x + \frac{1}{50}\sin x,$$

mit c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D).

Die partikuläre Lösung φ_p ist (als Linearkombination von Sinus und Cosinus) beschränkt. Damit ist die Lösung φ wegen

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_1(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \varphi_2(x) = 0$$

genau dann auf $\mathbb{R}^+$ beschränkt, wenn $c_1 = 0$ gilt, und wegen

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi_2(x) = \infty$$

genau dann auf $\mathbb{R}^-$ beschränkt, wenn $c_2 = 0$ gilt. Insgesamt ist φ genau dann eine in $\mathbb{R}$ beschränkte Funktion, wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt, also für $\varphi = \varphi_p$.

32. In Abhängigkeit von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare Anfangswertproblem

$$y'' - 2a\,y' + a^2 y = 2e^{ax} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'(0) = 0$$

zu betrachten, und dabei diejenigen $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Lösung die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$ erfüllt.

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}_0) \qquad y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\,a\,\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = a$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = e^{a\,x}, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_2(x) = x\,e^{a\,x},$$

ein Fundamentalsystem von (D_0). Die gegebene inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}) \qquad y'' - 2a\,y' + a^2 y = 2\,e^{ax}$$

besitzt die rechte Seite

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 2\,e^{a\,x},$$

der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 2$ vom Grade $m = 0$ und der Nullstelle a von χ der Ordnung $\alpha = 2$. Für die partikuläre Lösung φ_p von (D) wählen wir den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\,e^{ax} = \big(rx^2 + sx + t\big)\,e^{ax}$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = rx^2 + sx + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; nachdem e^{ax} und $x\,e^{ax}$ die homogene Gleichung (D_0) lösen, können wir $s = t = 0$ wählen. Wegen

$$\varphi_p'(x) = 2r\,x \cdot e^{ax} + r\,x^2 \cdot ae^{ax} = \left(2r\,x + ra\,x^2\right) e^{ax}$$

und

$$\varphi_p''(x) = (2r + 2rax) \cdot e^{ax} + \left(2rx + rax^2\right) \cdot ae^{ax} = \left(2r + 4rax + ra^2x^2\right) e^{ax}$$

ist φ_p genau dann Lösung von (D), wenn

$$\left(2r + 4rax + ra^2x^2\right) e^{ax} - 2a\left(2rx + rax^2\right) e^{ax} + a^2\left(rx^2e^{ax}\right) = 2e^{ax},$$

also

$$2re^{ax} = 2e^{ax},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt; damit ergibt sich $r = 1$ und folglich $\varphi_p(x) = x^2e^{ax}$. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2 + \varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(c_1 + c_2\,x + x^2\right) e^{ax},$$

mit c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von (D); dabei ist

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = (c_2 + 2x) \cdot e^{ax} + \left(c_1 + c_2\,x + x^2\right) \cdot ae^{ax} &= \\ &= \left((c_2 + ac_1) + (2 + ac_2)\;x + ax^2\right) e^{ax}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangswerte ergibt sich

$$\varphi(0) = 0 \iff c_1 \cdot e^0 = 0 \iff c_1 = 0$$

und damit

$$\varphi'(0) = 0 \iff c_2 + a\,c_1 \cdot e^0 = 0 \underset{c_1=0}{\iff} c_2 = 0,$$

insgesamt also

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2\,e^{ax}.$$

Diese Lösung des gestellten Anfangswertproblems erfüllt nun wegen

$$\varphi(1) = 1 \iff 1^2 \cdot e^a = 1 \iff e^a = 1 \iff a = 0$$

genau dann die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$, wenn $a = 0$ gilt; in diesem Fall ergibt sich als Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2.$$